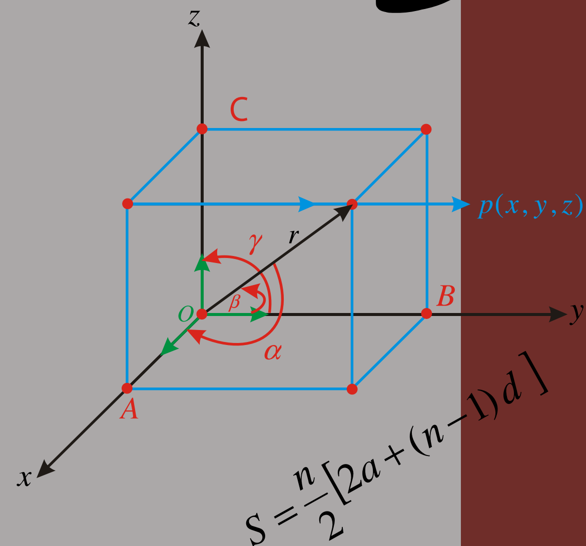
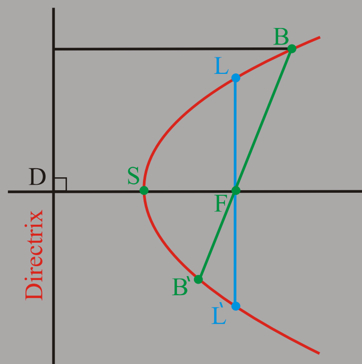


وزارت معارف

ریاضی

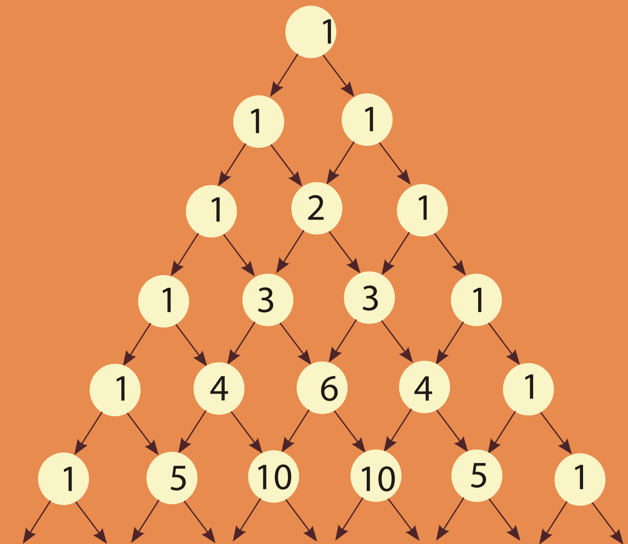
صنف ۱۱





ریاضی صنف ۱۱

سال چاپ : ۱۳۹۸





سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم



وزارت معارف

ریاضی

صنف ۱۱

سال چاپ ۱۳۹۸ هـ. ش.



مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: یازدهم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامهٔ وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

مکان چاپ: کابل

چاپ‌خانه:

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af



پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بی‌کران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و مارا از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ- که نخستین پیام الهی بر ایشان "خواندن" است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. درچنین برهه سرنوشت‌ساز، رهبری و خانواده بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت‌کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت‌پذیری، با این نیت تدریس را آغاز کنند، که در آینده نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان موثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه‌یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش‌آموزان خوب و دوست‌داشتنی به‌مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفاده بهتر کنند و خوشه‌چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

باآرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه‌یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف



فهرست

فصل اول مقاطع مخروطی

صفحه

فصل دوم مثلثات

فصل سوم هندسهٔ فضایی

فصل چهارم ترادف‌ها و سلسله‌ها

فصل پنجم لوگاریتم





فصل هشتم احصائیه

فصل نهم احتمالات



فصل اول

مقاطع مخروطی

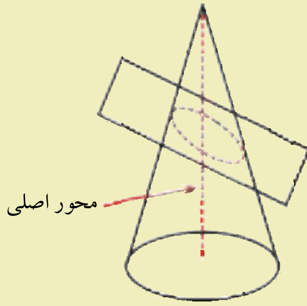






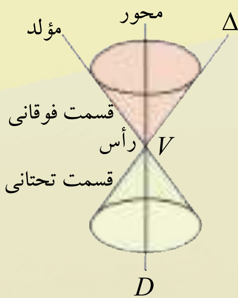
مقاطع مخروطی

Conic of section



آیا گفته می‌توانید درصورت تقاطع یک مخروط توسط یک مستوی فصل مشترک‌شان کدام نوع منحنی‌ها را به وجود می‌آورند؟

تعریف مقاطع مخروطی



دو خط مستقیم Δ و D را در نظر می‌گیریم که یکدیگر را در نقطهٔ v قطع کرده باشند، هرگاه خط D ثابت؛ ولی خط Δ به حول آن تحت زاویهٔ θ بچرخد از دوران خط Δ به دور D دو شکل در فضا که به دو طرف نقطه v طوری تولید می‌شوند که هر کدام آن‌ها یک مخروط را تشکیل می‌دهد؛ مانند شکل مقابل خط مستقیم D محور اصلی مخروط و خط مستقیم Δ مولد آن است.

مقاطع مخروطی با یک مستوی در حالات مختلف اشکال هندسی متفاوتی را به وجود می‌آورند که به نام مقاطع مخروطی یاد می‌شوند که هرکدام آن‌ها را به تفصیل مطالعه خواهیم نمود.

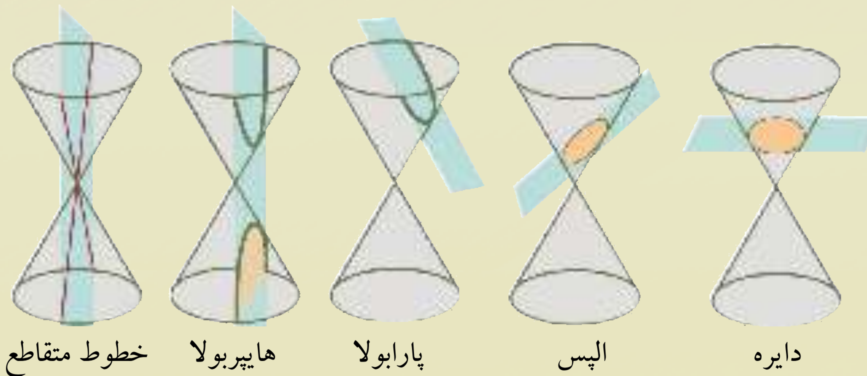
فعالیت

- یک مخروط را توسط مستوی طوری قطع نمایید که مستوی عمود به محور اصلی مخروط و یا موازی با قاعده‌ها باشد، محل تقاطع یا فصل مشترک‌شان چه نوع منحنی است؟
- مخروط را توسط یک مستوی طوری قطع نمایید که مستوی نسبت به محور اصلی مایل باشد، تقاطع یا فصل مشترک‌شان چه نوع منحنی است؟
- مخروط را توسط یک مستوی طوری قطع نمایید که مستوی موازی به مولد مخروط باشد، تقاطع یا فصل مشترک‌شان چه نوع منحنی است؟
- دو مخروط سر به سر را که دارای قاعدتین موازی باشند. توسط یک مستوی طوری قطع نمایید که مستوی موازی به محور اصلی باشد تقاطع یا فصل مشترک دو مخروط چه نوع منحنی است؟
- مخروط را توسط یک مستوی طوری قطع کنید که مستوی محور اصلی مخروط را در بر داشته باشد تقاطع‌شان چه نوع شکل هندسی است؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را می‌توان به دست آورد.

نتیجه

- هرگاه یک مخروط توسط مستوی طوری قطع شود که مستوی عمود به محور اصلی مخروط ویا موازی با قاعده‌ها باشد، شکل حاصله عبارت از دایره(Circle) است.
- هرگاه یک مخروط توسط مستوی طوری قطع شود که مایل به محور اصلی باشد شکل حاصل‌شده عبارت از بیضوی (Ellipse) است.
- هرگاه یک مخروط توسط مستوی طوری قطع شود که موازی به مولد مخروط بوده؛ ولی آن را دربر نداشته باشد، شکل حاصل‌شده عبارت از پارابولا (Parabola) است.
- هرگاه دو مخروط توسط مستوی طوری قطع شود که موازی به محور اصلی مخروط بوده؛ ولی آن را در بر نداشته باشد، شکل حاصل‌شده عبارت از هایپربولا (Hyperbola) است.
- هرگاه سطح مستوی محور اصلی مخروط را در بر داشته باشد شکل حاصل‌شده عبارت از دو خط متقاطع است.





تمرین

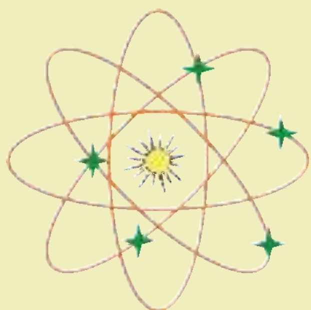
1- با در نظرداشت اشکال فوق مستوی و مخروط را به شکل متقاطع رسم کنید که فصل مشترک‌شان دایره و یا یک نقطه باشد؟

2- اگر یک مستوی دو مخروط رأس به رأس را طوری قطع کند که محور اصلی هر دو مخروط را دربر داشته باشد فصل مشترک‌شان چه نوع منحنی می‌باشد؟

3- فصل مشترک یک مخروط و یک مستوی در کدام حالت یک خط مستقیم است توسط شکل نشان دهید.

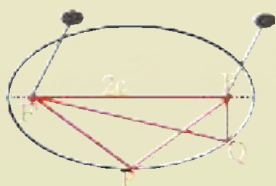
بیضوی
Ellipse

مسیر حرکت سیاره‌ها به دور آفتاب یا نظام شمسی چه نوع منحنی‌ها اند؟



فعالیت

- یک ورق کاغذ را بالای میز توسط دو سنجاق به فاصلهٔ معین و ثابت درنقاط F و F′ محکم کنید.
- انجام‌های یک نخ را که طول آن بیشتر از فاصله بین دو سنجاق یا $\overline{FF'}=2c$ است محکم نموده؛ سپس یک پنسل را به اطراف دو سنجاق دور دهید، رسمی که به وسیلهٔ پنسل‌تان به دست آمده چه‌گونه یک منحنی است؟

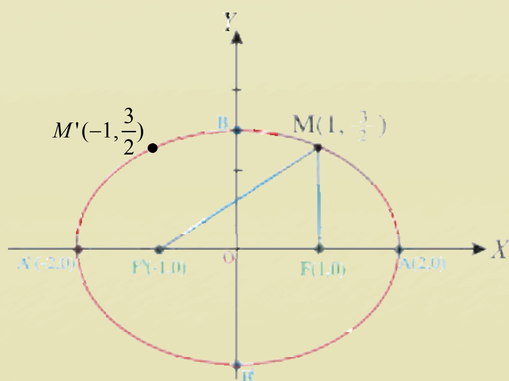


از فعالیت بالا می‌توان نتیجهٔ زیر را بیان کرد.

نتیجه: شکلی که با درنظرداشت اندازهٔ فاصلهٔ معین بین دو سنجاق و نخ به دست آمده عبارت از منحنی‌یی است که به نام بیضوی و نقاط F و F′ به نام محراق‌های بیضوی یاد می‌گردد.

فعالیت

- درشکل مقابل مختصات نقاط A',F,F',M',M و A داده شده با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه؛ یعنی طول $|MF|,|MF'|$ و $|AA'|$ را دریافت کنید.
- حاصل‌جمع $|MF|+|MF'|$ را به دست آورده با طول $|AA'|$ مقایسه کنید.



• نقطهٔ $M'(-1 \ ,+\frac{3}{2})$ را بـالای محیط بیضوی انتخاب و مراحل ذکر شدهٔ فوق را بـالای نقطهٔ M' تطبیق نموده قیمت‌های $|MF|+|MF'|$ و $|M'F|+|M'F'|$ را باهم مقایسه کنید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف: محل هندسی آن نقاط یک مستوی که مجموعهٔ فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ مستقر مساوی به یک طول ثابت ($2a$) باشد، به نام بیضوی یاد می‌شود. نقاط مستقر را محراق‌های بیضوی گویند که با حروف F و F' نشان داده می‌شود و طول ثابت عبارت از $\overline{AA'}=2a$ می‌باشد.(A و A' راس‌های بیضوی اند).

$$|M'F|+|M'F'|=2a \quad , \quad |MF|+|MF'|=2a$$

بنابرآن:

$$|M'F|+M'F'|=|MF|+|MF'|$$

قطرها و رأس‌های بیضوی

بیضوی دارای قطرهای بی‌شمار می‌باشد، طویل‌ترین قطر آن که ازمحراق‌ها می‌گذرد و بیضوی را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کند، به نام قطر کبیر (قطر اطول) یا Major axis یاد می‌شود و کوچک‌ترین قطر آن که به نقطهٔ تنصیف $\overline{FF'}$ عمود می‌باشد، به نام قطر صغیر یا Minor axis یاد می‌شود. نقاط A،A' و B،B' رأس‌های بیضوی اند. قطر کبیر را به AA' که طول آن $\overline{AA'}=2a$ و قطر صغیر را به BB' که طول آن $\overline{BB'}=2b$ است، نشان می‌دهند.

یادداشت: هرگاه نقطهٔ M بالای یکی از رأس‌های قطر اصغر یعنی B و یا B' منطبق گردد در این صورت در شکل فوق $\overline{MF}=\overline{MF'}$ می‌شود.

نظر به تعریف بیضوی می‌دانیم:

$$\overline{MF}+\overline{MF'}=2a$$

$$2\overline{MF}=2a$$

$$\overline{MF}=a$$

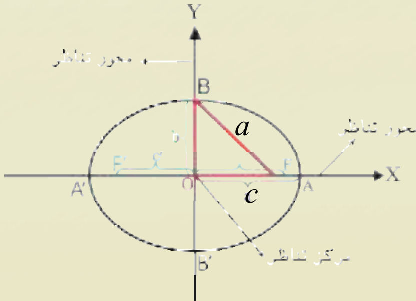


رابطه بین محراق‌ها و قطرها:

رابطه بین محراق‌ها و قطرها را نظر به قضیهٔ فیثاغورث به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

محور تناظر و مرکز تناظر بیضوی



بیضوی دارای دو محور تناظر است، یکی محور طویل که به قطر AA' منطبق است، محور محراقی بیضوی و دیگری محور کوتاه که به BB' منطبق است، محور تناظر بیضوی نامیده می‌شوند.

محل تلاقی این دو محور تناظر، مرکز تناظر بیضوی نامیده می‌شود که به (O) نشان داده می‌شود.

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (Eccentricity): نسبت طول محراقین بر طول محور کبیر را عن المرکزیت می‌نامند که شکل یک بیضوی توسط آن تعیین می‌گردد و آن را به حرف e نشان می‌دهند.

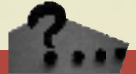
$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

می‌دانیم که در هر بیضوی $0 < c < a$ است پس $0 < e < 1$ می‌باشد، چرا ؟

رابطه بین عن المرکزیت و قطرهای بیضوی $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ است، با استفاده از رابطه $e = \frac{c}{a}$ آن را به دست آورید.

یادداشت: اگر قیمت e نزدیک به صفر شود محراق‌ها به طرف مرکز نزدیک می‌شوند و بیضوی تقریباً شکل دایره‌یی را به خود می‌گیرد.

اگر e به عدد 1 نزدیک شود در این صورت محراق‌ها نزدیک به رأس‌های قطر بیضوی می‌شوند که یک شکل طویل را به خود می‌گیرد؛ در حل بسیاری مسایل مربوط به بیضوی از عن المرکزیت استفاده می‌شود.



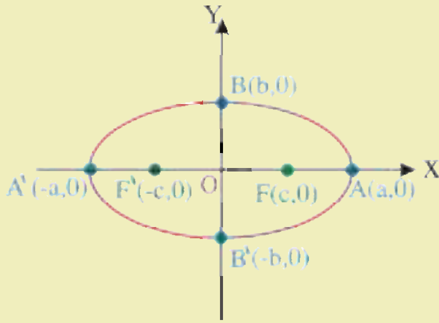
تمرین

1 – هرگاه در بیضوی طول قطر کبیر مساوی به طول قطر صغیر شود، کدام منحنی به دست می‌آید؟

2 – اگر عن المرکزیت بیضوی $\frac{2}{3}$ باشد، درآن صورت نسبت بین قطر کبیر و قطر صغیر را دریافت کنید.

معادلهٔ بیضوی

Equation of Ellipse



آیا معادلهٔ بیضوی را که مرکز آن در مبدأ کمیات وضعیه باشد دریافت کرده می‌توانید؟

فعالیت

- بیضوی‌یی را رسم کنید که مرکز آن مبدأ کمیات وضعیه باشد؛ سپس محراق‌های بیضوی را روی محور x تعیین کنید.
- یک نقطهٔ کیفی $M(x,y)$ را روی محیط بیضوی انتخاب و آن را به محراق‌ها وصل کنید.
- رابطهٔ تعریف بیضوی را نظر به نقطهٔ M بنویسید.
- با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه، طول‌های MF و MF' را دریافت نموده و به اساس آن معادلهٔ بیضوی را به دست آورید.

ثبوت معادلهٔ بیضوی

حالت اول: نظر به تعریف بیضوی می‌توان نوشت:

$$|MF|+|MF'|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

بعد از مربع ساختن دو طرف می‌توان نوشت

$$(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2-x^2-2cx-c^2-y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ /\div(-4)$$

$$cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}-a^2\Rightarrow cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(cx+a^2)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$

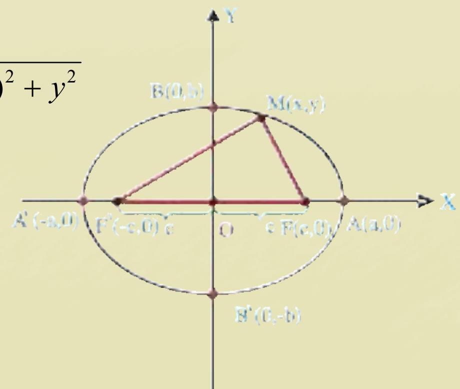
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2[(x+c)^2+y^2]$$

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2+a^2c^2-a^4=0$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$



طوری که $a^2=b^2+c^2$ است، سپس $b^2=a^2-c^2$ می‌شود، در این صورت معادله بالا را طور زیر می‌نویسیم.

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \,/\div a^2b^2$$
$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

درمعادلهٔ فوق a نصف قطر کبیر و b نصف قطر صغیر بیضوی می‌باشد که مرکز آن مبدأ کمیات وضعیه و محور محراقی آن محور x می‌باشد. مختصات محراق، مختصات راس‌های قطر کبیر و قطر صغیر عبارت اند از:

$$\begin{cases}A(a،\ 0)\\A'(-a,0)\end{cases} \qquad \begin{cases}B(0،b\ )\\B'(0،\ -b)\end{cases} \qquad \begin{cases}F(c،\ 0)\\F'(-c،\ 0)\end{cases}$$

حالت دوم: هرگاه محراق‌های بیضوی بالای محور y قرار داشته باشند در این صورت معادله بیضوی عبارت است از:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

گراف آن را رسم و مختصات قطر کبیر، قطر صغیر و محراق‌ها را بنویسید.

مثال 1: هرگاه قطر کبیر بالای محور y وطول آن $|AA'|=6$ و طول قطر صغیر $|BB'|=4$ واحد طول باشند معادلهٔ بیضوی را بنویسید.

حل:

$$|AA'|=2a=6 \ \Rightarrow\ a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \ \Rightarrow\ b=2$$

حال قیمت‌های a و b را درمعادلهٔ عمومی وضع می‌کنیم.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

مثال 2: اگر قطر کبیر بالای محور x و طول آن $|AA'|=2a=10$ واحد طول وطول قطر صغیر $|BB'|=2b=8$ واحد طول باشد مختصات رأس‌های قطر کبیر، قطر صغیر، فاصلهٔ محراقی، محراق‌ها و عن‌المرکزیت بیضوی را دریافت و گراف آن را رسم کنید.

حل: می‌دانیم:

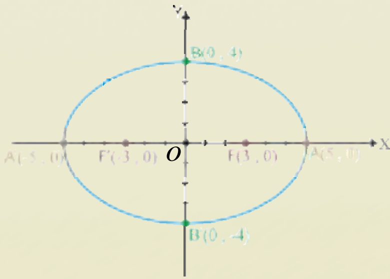
$$|A\,A'|=2a=10 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 5$$
$$|B\,B'|=2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 4$$



مختصات رأس‌های قطر کبیر عبارت اند از: $A(5,0)$ $A'(-5,0)$

مختصات رؤس قطر صغیر عبارت اند از: $B(0,4)$, $B'(0,-4)$

برای دریافت مختصات محراق‌ها، قیمت c را دریافت می‌کنیم:



$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow (5)^2 = (4)^2 + c^2$$
$$c^2 = 25 - 16 \quad \Rightarrow c^2 = 9 ، c = \pm 3$$

مختصات محراق‌ها: $F'(-3,0), F(3,0)$

عن المرکزیت: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

مثال3: گراف بیضوی‌یی را که معادلهٔ آن $4x^2 + y^2 = 16$ است رسم کرده مختصات رأس‌ها و محراق‌های آن را تعیین کنید.

حل: اطراف مساوات را به عدد 16 تقسیم کرده معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{16}{16} \quad \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

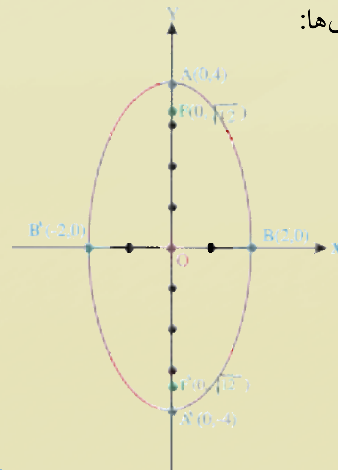
چون در بیضوی طول $a > b$ است؛ بنابرآن محراق‌های بیضوی بالای محور y قرار دارند.

مختصات رأس‌ها:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow A(0، 4)، A'(0، -4)$$
$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow B(2، 0)، B'(-2، 0)$$

مختصات محراق‌ها:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$



مثـــال 4: مختـصات یـک نقطـهٔ محـیط بیـضوی $P(2,4)$ و مختـصات محـراق‌هـا عبـارت انـد از $F(3\sqrt{2}\ ,\ 0)$ ، $F'(-3\sqrt{2}\ ،\ 0)$، طول‌های قطر کبیر وصغیر را دریافت کنید.

حل: نظر به تعریف بیضوی داریم.

$$|PF|+|PF'|=2a....I$$

طـول فاصـلـه‌هـای PF و PF′ را دریافــت مــی کنــیم. قیمــت‌هــای $|PF|=\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2+4^2}$ و $|PF'|=\sqrt{(2-3\sqrt{2})^2+4^2}$ را در رابطهٔ بالا در جاهای‌شان قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2+4^2}+\sqrt{(2-3\sqrt{2})^2+4^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16}+\sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16}=2a$$

$$\Rightarrow (\sqrt{38+12\sqrt{2}}+\sqrt{38-12\sqrt{2}})^2=(2a)^2$$

$$38+12\sqrt{2}+2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2}}+38-12\sqrt{2}=4a^2$$

$$76+2\sqrt{1444-288}=4a^2 \Rightarrow 76+2\cdot 34=4a^2 \Rightarrow 76+68=4a^2$$

$$144=4a^2 \Rightarrow a^2=\frac{144}{4}=36 \Rightarrow a=\pm 6$$

$$|AA'|=2a=2\cdot 6=12$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$(3\sqrt{2})^2=(6)^2-b^2 \quad \Rightarrow \quad 9\cdot 2=36-b^2$$

$$b^2=18 \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{9\cdot 2} \quad \Rightarrow \quad b=3\sqrt{2}$$

$$|BB'|=2b=2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$



تمرین

1 – معادلات زیر را درنظر بگیرید طول قطر کبیر و فاصله بین محراق‌ها را به دست آورید.

$a)\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ $\qquad b)\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

2 – معادلهٔ بیضوی‌یی را بنویسید که عن المرکزیت آن 0.8 باشد.

معادلهٔ بیضوی‌یی که مرکز آن یک نقطهٔ اختیاری باشد

آیا معادلهٔ بیضوی را که مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه نباشد دریافت کرده می‌توانیم؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

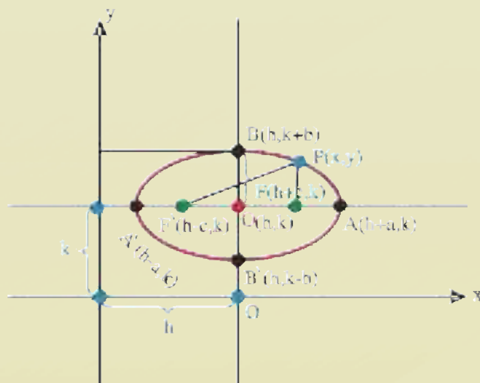
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعالیت

- یک بیضوی را رسم کنید که مرکز آن (h,k) و قطر کبیر آن موازی با محور x باشد.
- یک نقطهٔ $P(x,y)$ را روی محیط بیضوی در نظر گرفته و آن را به F و F' وصل کنید.
- با در نظرداشت مرکز بیضوی (h,k) مختصات محراق‌های F و F' رأس‌های A , A' و B,B' را در شکل کمیات وضعیه نشان دهید.

حالت اول: با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه و تعریف بیضوی، معادلهٔ آن را به دست می‌آوریم:

قیمت‌های $\overline{PF}$ و $\overline{PF'}$ را در رابطهٔ تعریف بیضوی قرار می‌دهیم:



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad /(\quad)^2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\ /\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

اطراف را مربع ساخته بعد از اختصار به‌دست می‌آید:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

چون در بیضوی $a^2-c^2=b^2$ است؛ پس می‌توان نوشت:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2\ \ /\ \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

مثال 1: مختصات مرکز، محراق‌ها و راس‌های قطر کبیر بیضوی را که معادلهٔ آن $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ می‌باشد، دریافت و گراف آن را رسم کنید.

حل: چون این معادله شکل معادلهٔ عمومی بیضوی را دارد؛ بنابرآن مختصات مرکز بیضوی نقطهٔ $(6,-4)$ بوده ومحور کبیر آن موازی به محور x است.

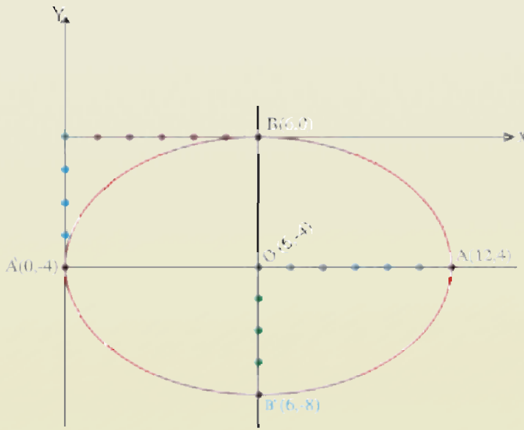
$$a^2=36\ \ \Rightarrow\ a=\pm 6$$
$$b^2=16\ \ \Rightarrow\ b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

مختصات رأس‌های قطر کبیر عبارت‌اند از:

$$A(h+a،k\ )=A(6+6،\ -4)=A(12،\ -4)$$
$$A'(h-a,k)=(6-6،\ -4)=A'(0،\ -4)=$$

مختصات رأس‌های قطر صغیر عبارت اند از:

$$B(h,K+b)=B(6،\ -4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,K-b)=B'(6,-4-4)=B'(6،\ -8)$$

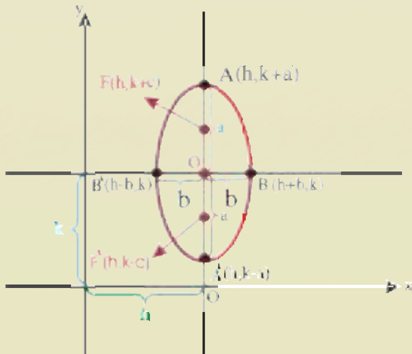


مختصات محراق‌ها عبارت اند از:

$F(h+c، k) = (6+2\sqrt{5}، -4)$

$F'(h-c، k) = (6-2\sqrt{5}، -4)$

حالت دوم: هرگاه محور محراقی موازی به محور y باشد.



دراین صورت معادلهٔ بیضوی شکل زیر را به خود اختیار می کند $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

$A(h , k+a)، A'(h,k-a)$

$B(h-b ,k), B'(h+b,k)$

$F(h ,k-c)، F'(h,k+c)$

یادداشت: معادلهٔ $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادلهٔ بیضوی است در صورتی که $A \neq C$ و هم علامه باشند؛ یعنی $A>0 \ , C>0$ و یا $A<0 \wedge C<0$

مثا ل 2: معادلهٔ $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ را به شکل معادله معیاری بیضوی تبدیل کنید.

حل: با استفاده از روش تکمیل مربع معادله را به شکل معیاری می‌آوریم.

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$

$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$

$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$

$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$

$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311 \quad \Rightarrow 16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$

$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

اطراف معادلهٔ فوق را تقسیم 400 می‌نماییم.
$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

معادلهٔ فوق معادلهٔ بیضوی است که مرکز آن نقطهٔ (2 ، 1 −) می‌باشد.

مثال 3: معادلهٔ زیر را به شکل معادلهٔ معیاری بیضوی تبدیل کنید.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل: معادله را ترتیب داده با استفاده از روش تکمیل مربع به شکل معیاری آن می‌آوریم:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$
$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$
$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2+(1)^2-(1)^2]-23=0$$
$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{مربع کامل}}-(2)^2+9\underbrace{(y^2-2y+(1)^2)}_{\text{مربع کامل}}-9-23=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2-9-4-23=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

اطراف مساوات را تقسیم عدد 36 می‌نماییم:
$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$
$$\frac{(x+2)^2}{6^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$$



تمرین

1 – مختصات مرکز، محراق‌ها، رأس‌ها و طول قطر کبیر هر یک از بیضوی‌های زیر را دریافت کنید.

$a)\quad \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\quad x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

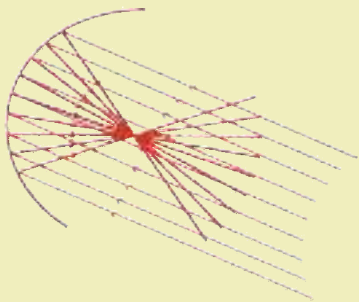
2- معادلهٔ بیضوی را بنویسید که مرکز آن در نقطهٔ (2 , 1) و محراق آن نقطهٔ (2 , 6) بوده و از نقطهٔ (6، 4) بگذارد.

3- معادلات بیضوی زیر را به شکل معیاری تبدیل نمایید و کمیات وضعیهٔ مرکز، رأس‌ها، محراق‌ها، طول محور کبیر، طول محور صغیر و عن‌المرکزیت را دریافت و گراف آن را رسم نمایید.

$a)\quad 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\quad 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

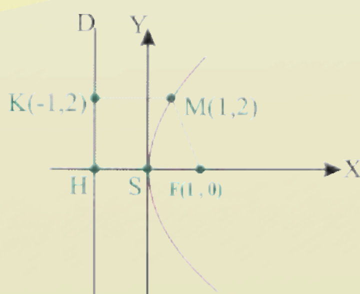
پـارابـولا

Parabola



اگر شعاع آفتاب به یک عدسیهٔ مقعر بتابد، شعاع منعکسهٔ آن از کدام نقطه می‌گذرد؟ نقطهٔ مذکور به کدام نام یادگردیده فصل مشترک عدسیه با یک مستوی متقاطع که محور عدسیه را در بر داشته باشند، کدام نوع منحنی است؟

فعالیت



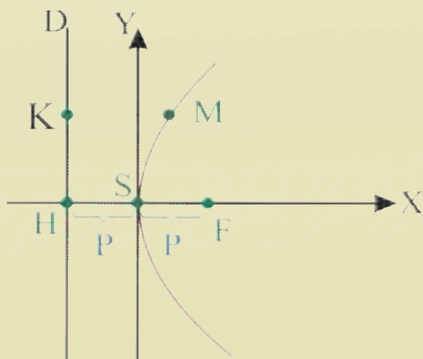
- در شکل مقابل مختصات نقاط M، F و K داده شده‌اند، با استفاده از فورمول فاصله بین دونقطه، طول‌های FM و KM را دریافت و باهم مقایسه کنید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف

محل هندسی تمام نقاطی که در یک مستوی واقع بوده و از یک نقطهٔ ثابت و یک خط مستقیم ثابت فاصله‌های مساوی داشته باشند، به نام پارابولا یاد می‌گردد. نقطهٔ ثابت را محراق (F) وخط مستقیم D را به نام خط هادی(Directrix) یا خط موجه پارابولا می‌نامند. $\overline{MF} = \overline{MK}$

خطی که از محراقی و رأس پارابولا بگذرد و به خط مستقیم D عمود باشد، به نام محور تناظر یامحور محراق پارابولا یاد می‌شود.



نقطهٔ مشترک محور تناظر و منحنی را رأس پارابولا می گویند و به S نشان می‌دهند.

آیا گفته می‌توانید که S نقطهٔ تنصیف $\overline{FH}$ است، چرا ؟

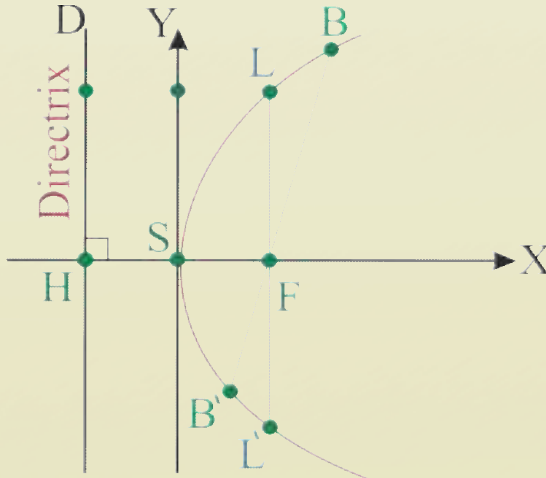
عن المرکزیت در پارابولا $(e = 1)$ است، چرا ؟

وترهای پارابولا

خط مستقیمی که دو نقطهٔ پارابولا را باهم وصل کند به نام وتر پارابولا یاد می‌شود.

در شکل $\overline{BB'}$ را که از محراق پارابولا عبور نموده است وتر محراقی می‌نامند.

LL' را که در نقطهٔ محراق بالای محور تناظر پارابولا عمود است. وتر عمودی می‌نامند.



تمرین

به کمک شکل بالا نشان دهید که طول وتر عمودی پارابولا چند برابر طول خط $\overline{FH}$ می‌باشد؟

معادلۀ پارابولا

چطور می‌توانیم معادلۀ پارابولا را که رأس آن بالای مبدأی کمیات وضعیه قرار داشته باشد، دریافت کنیم.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

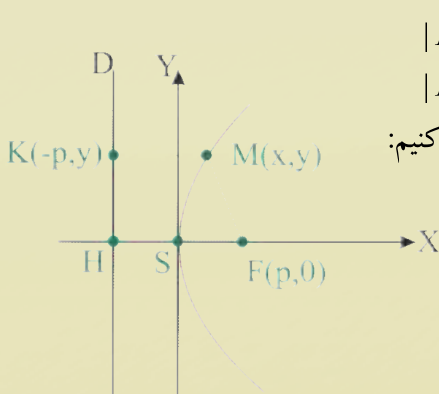
فعالیت

- سیستم کمیات وضعیۀ قایم را در نظر بگیرید و خط هادی موازی با محور y را در آن رسم کنید.
- منحنی پارابولا را طوری رسم کنید که رأس آن از مبدأی کمیات وضعیه بگذرد.
- بالای محور x محراق را طوری تعیین نمایید که فاصلۀ آن از رأس پاربولا مساوی به فاصله خط هادی از رأس پارابولا باشد.
- به روی منحنی نقطۀ $M(x, y)$ را انتخاب نموده آن را به F وصل و از نقطۀ M یک عمود بالای هادی(خط موجه) رسم و نقطۀ تقاطع آن را K بنامید.
- مختصات نقطۀ F و K را بنویسید.

اکنون با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه، فاصله بین نقاط M , F و M , K را دریافت و قیمت‌های آن را در رابطۀ تعریف پارابولا قرار دهید: $|MF| = |MK|$

ثبوت معادلۀ حالت اول:

$$|MF| = \sqrt{y^2 + (p-x)^2}$$
$$|MK| = x + p$$



قیمت‌های $\overline{MF}$ و $\overline{MK}$ را در رابطۀ $|MK| = |MF|$ وضع می کنیم:

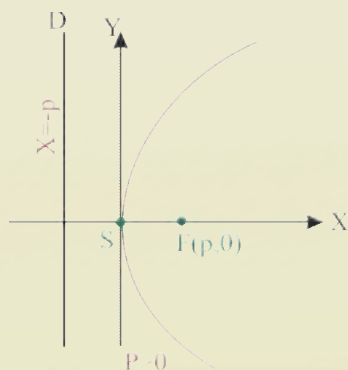
$$\sqrt{y^2 + (p-x)^2} = x + p$$
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

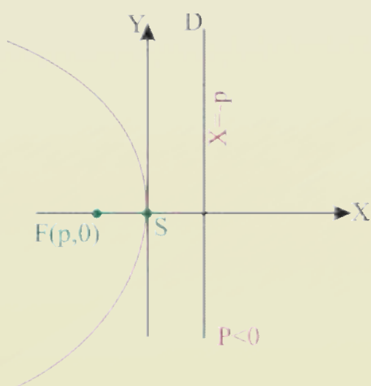
معادله بالا، معادلۀ پارابولای است که مرکز آن در مبدأ کمیات وضعیه و محور تناظر آن با محور x منطبق باشد.

مختصات محراق آن عبارت از $F(p,0)$ است و معادله خط هادی آن $x=-p$ می‌باشد.

اگر $p>0$ باشد، دهن پارابولا به طرف راست باز می‌باشد.

اگر $p<0$ باشد، دهن پارابولا به طرف چپ باز می‌باشد.



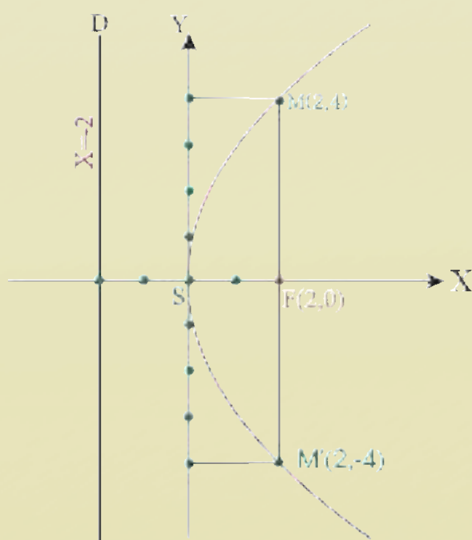


مثال 1: معادلهٔ پارابولایی را به دست آورید که مختصات محراق آن $F(2,0)$ و معادلهٔ خط هادی $x=-2$ بوده مختصات انجام‌های وتر عمودی آن را دریافت کنید.

حل: از مختصات محراقی که روی محور قرار دارد گفته می‌توانیم که $P=2>0$ است، بنابرآن دهن پارابولا به طرف راست باز می‌باشد. اکنون قیمت P را در معادله وضع می کنیم:

$$y^2=4px$$

$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$



اگر قیمت $x=2$ را درمعادلهٔ $y^2=8x$ قرار دهیم، در این صورت دو نقطهٔ پارابولا که انجام‌های وتر عمودی نیز می‌باشد، به دست می‌آید و آن‌ها عبارت اند از:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

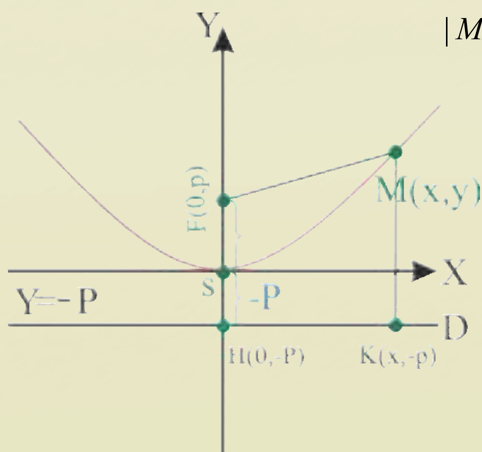
مختصات انجام‌های وتر عمودی:

$$M(2,4) \;,\quad M'(2,-4)$$

حالت دوم: اگر محراق (F) پارابولا بالای محور y واقع وخط مستقیم D موازی به محور x باشد، معادلهٔ معیاری پارابولا را دریافت کنید.

ثبوت: نقطهٔ $M(x,y)$ را روی منحنی پارابولا درنظر گرفته نظر به تعریف پارابولا چنین می‌نویسیم:

$$|MF|=|MK|$$
$$|MF|=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$
$$|MK|=\sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$



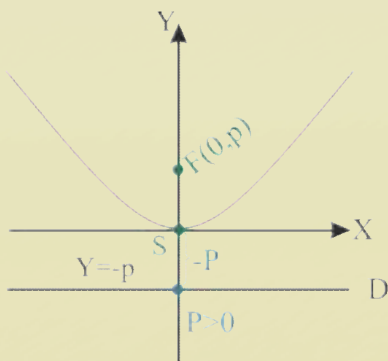
$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(y+p)^2}\ /(\quad)^2$$

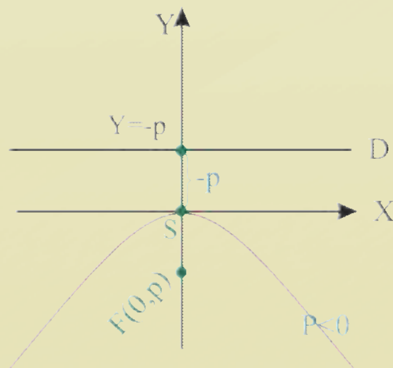
$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$
$$\Rightarrow x^2=2py+2py$$
$$x^2=4py$$

معادلهٔ فوق، معادله پارابولا بوده که محور تناظر آن محور y و رأس آن مبدأ کمیات وضعیه است. مختصات محراق آن $F(0,p)$ و معادلهٔ خط هادی آن $y=-p$ می‌باشد.

اگر $p>0$ باشد؛ دهن پارابول به طرف بالا باز می‌باشد.

اگر $p<0$ باشد؛ دهن پارابول به طرف پایین باز می‌باشد.





مثال 2: کمیات وضعیهٔ رأس، محراق و معادلهٔ خط موجهٔ پارابولا $x^2 = 12y$ را دریافت کنید.

حل: در معادله $x^2 = 4py$ قیمت p و y را به جای آن‌ها قرار می‌دهیم:

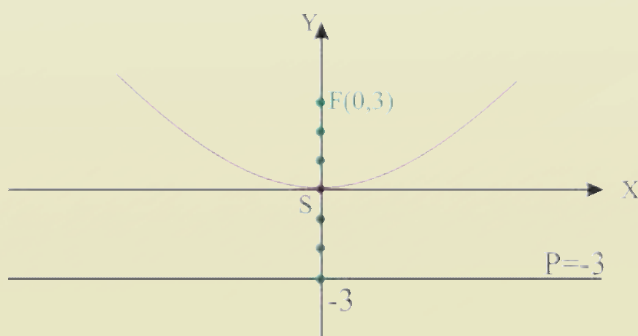
$$4P = 12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 3}$$

چون $P > 0$ است دهن پاربولا به طرف بالا باز است.

1 – کمیات وضعیه رأس پارابولا عبارت است از: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – کمیات وضعیهٔ محراق پارابولا عبارت است از: $F(0,3)$

3 – معادله خط موجهٔ پارابولا عبارت است از: $y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = -p$





تمرین

1 – کمیات وضعیهٔ رأس و معادلهٔ خط هادی(موجهٔ) پارابولاهایی که معادلات آن‌ها عبارت از $y^2 - 4x = 0$ و $x^2 = 2y$ می‌باشند تعیین کرده و گراف هر کدام آن‌ها را رسم کنید.

2 – معادلهٔ پارابولایی را دریافت کنید که مختصات رأس و محراق آن طور زیر داده شده باشد:

$a)\ S(0,0) \qquad\qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad\qquad F(-2,0)$

معادلهٔ پارابولا که رأس آن یک نقطهٔ اختیاری باشد

آیا معادلهٔ پارابولا را دریافت کرده می‌توانیم که مختصات رأس آن مبدأ کمیات وضعیه نباشد؟

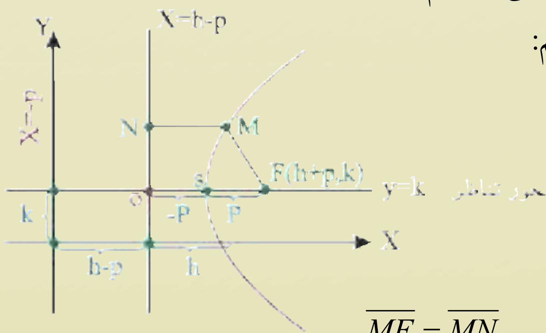
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعالیت

- یک پارابول را در سیستم کمیات وضعیهٔ قایم رسم کنید که رأس آن (h,k) باشد و محور تناظر آن موازی به محور x باشد.
- روی منحنی پارابولا نقطهٔ $M(x,y)$ را انتخاب و آن را به F وصل و از نقطه M یک عمود بالای هادی(موجه) رسم نمایید و آن را N بنامید.

حالت اول: با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه، فاصله بین نقاط F,M و N,M را پیدا کنید بعد از آن معادلهٔ پارابولا را که رأس آن $S(h,k)$ است به دست آورید.

ثبوت: چون کمیات وضعیهٔ نقاط F و M را می‌شناسیم و نیز کمیات وضعیهٔ نقطهٔ N عبارت از: $(h-p,y)$ می‌باشد. نظر به تعریف پارا بولا داریم:



$$\overline{MF}=\overline{MN}$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

اطراف مساوات را مربع می‌سازیم:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2+(y-y)^2$$
$$x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

بعد از ساده‌کردن رابطهٔ فوق به دست می‌آید:

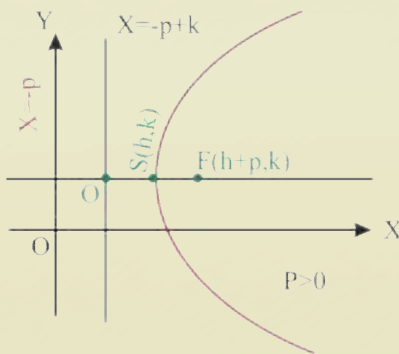
$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

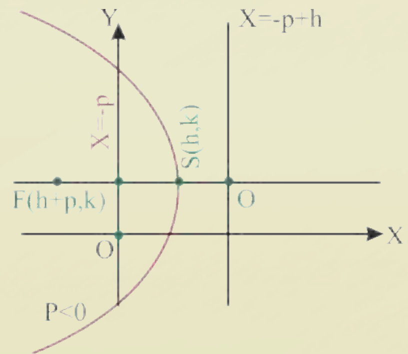
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ پارابولایی را نشان می‌دهد که کمیات وضعیه رأس و محراق آن به ترتیب $S(h,k)$ و $F(h+p,k)$ است، معادله خط موجه آن $x=-p+h$ و محور تناظر آن $y=k$ می‌باشد.

اگر $p>0$ باشد دهن پارابول به طرف راست باز می‌باشد.

اگر $p<0$ باشد دهن پارابول به طرف چپ باز می‌باشد.





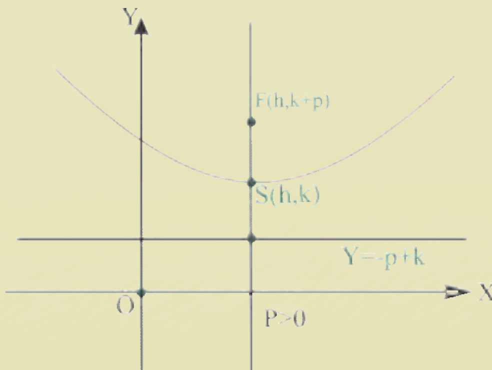
حالت دوم

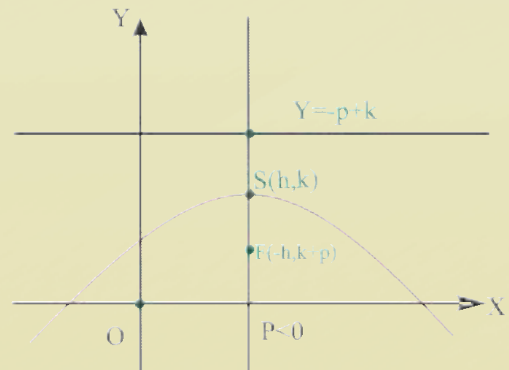
معادلهٔ پارابولا که رأس آن (h,k) و محورتناظر آن موازی به محور y باشد، عبارت است از: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ که مختصات رأس آن $s(h,k)$ و مختصات محراق آن $F(h,k+p)$ است.

معادلهٔ محور تناظر آن $x=-h$ ومعادلهٔ خط موجه آن $y=k-p$ است.

اگر $p>0$ باشد دهن پارابول به طرف بالا باز می‌باشد.

اگر $p<0$ باشد دهن پارابول به طرف پایین باز می‌باشد.





مثال 1: از معادلهٔ پارابولا $(x-1)^2=12(y-2)$ مختصات رأس، مختصات محراق معادلهٔ خط موجه، معادله محور تناظر و مختصات انجام‌های وتر عمودی را دریافت کنید.

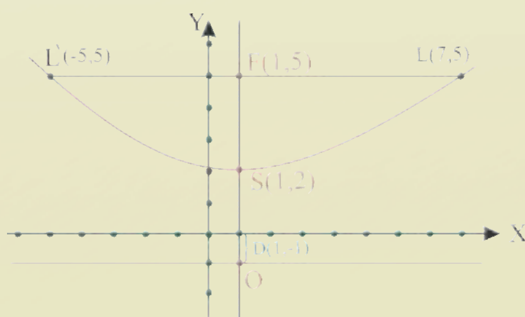
حل: چون معادله شکل عمومی $(x-h)^2=4p(y-k)$ را دارد، بنابرآن : $h=1$، $k=2$

کمیات وضعیه رأس عبارت از $S(1,2)$ است.
$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

مختصات محراق: $F(h،k+p)=F(1، 2+3)=F(1، 5)$

معادلهٔ خط موجه:
$$y=k-p \Rightarrow y=2-3=-1$$
$$x=h \Rightarrow x=1$$

برای دریافت مختصات انجام‌های وتر عمودی قیمت y را در معادله داده شده قرار می‌دهیم:



$$y=5$$
$$(x-1)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$x-1=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7 \quad , \quad x_2=-6+1=-5$$
$$L(7، 5) \qquad L'(-5، 5)$$

مثال 2: معادلهٔ $(y-4)^2=-6(x+3)$ را درنظر گرفته مختصات رأس، محراق، معادلهٔ خط موجه، معادله محور تناظر و مختصات انجام‌های وترعمودی آن را دریافت و گراف آن را ترسیم کنید.

حل: مختصات رأس $k=4، h=-3 \Rightarrow S(-3، 4)$
$$4p=-6 \Rightarrow p=-\frac{3}{2}$$

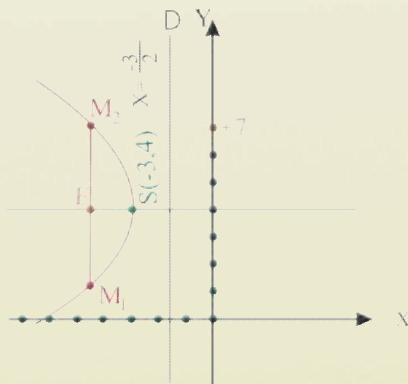
چون $P=-\frac{3}{2}<0$ است دهن پارابولا به طرف چپ باز است.

مختصات محراق $F(h+p، k)=F(-\frac{9}{2}، 4)$

معادلهٔ خط موجه عبارت است از: $x=h-p \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

معادلهٔ محور تناظر $y=k \Rightarrow y=4$

قیمت $x=-\frac{9}{2}$ مختصهٔ محراق را درمعادلهٔ داده شده وضع نموده مختصات انجام‌های وتر عمودی آن را دریافت نمایید.



$$(y-4)^2=-6(x+3)$$
$$(y-4)^2=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm3$$
$$y_1=3+4=7 \text{ ، } y_2=-3+4=1$$
$$M_1(-\frac{9}{2},7) \qquad M_2(-\frac{9}{2},1)$$

یادداشت: گراف معادلهٔ $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ یک پارابولا است در صورتی که A یا C صفر باشد نه هر دوی آن ($A=0$، $C\neq0$ یا $A\neq0$، $C=0$).

سؤال: معادلهٔ $(x-h)^2=4p(y-k)$ را به شکل توسعوی آن تبدیل کنید.

مثال 3: معادلهٔ پارابولا $y^2-2y-8x+25=0$ را به شکل معادلهٔ معیاری پارابولا تبدیل، مختصات رأس و محراق، معادلهٔ خط موجه و محور تناظر آن را به دست آورید.

حل: درمعادله داده شده $A=0$ است، پس معادله را نظر به متحول y تکمیل مربع می‌نمایم:

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2-8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \Rightarrow (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$(y-1)^2=-8(x+3) \Rightarrow 4p=-8 \Rightarrow p=-2<0$$

مختصات رأس: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

مختصات محراق: $F(h+p,k) \Rightarrow F(-3-2\text{، }1)=F(-5\text{، }1)$

معادلهٔ خط موجه: $x=h-p \quad \Rightarrow \quad x=-3-1=-4$

محور تناظر: $y=k \quad \Rightarrow \quad y=1$

تمرین

1 – معادلهٔ پارابولا را دریافت کنید، درصورتی که:

$S(1,3), F(-1,3)$

2 – گراف معادلهٔ $(y-1)^2=12(x-4)$ را با تمام جزئیات آن رسم کنید.

3 – معادلات زیر را به شکل معادلات معیاری تبدیل و گراف آن‌ها را رسم نمایید.

a) $y^2-6y+8x+41=0$ b) $x^2-2x-6y-53=0$

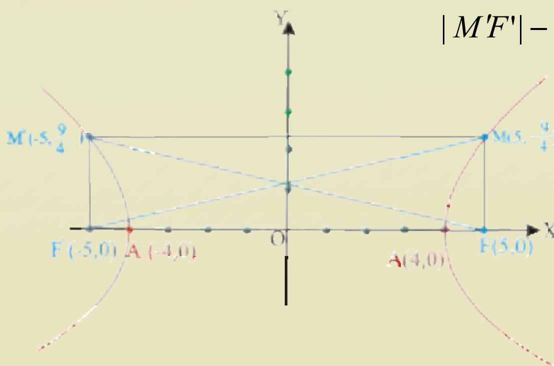
هایپربولا
Hyperbola



محل هندسی تمام نقاط یک مستوی که تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ مستقر مساوی به یک طول ثابت باشد، چه نوع منحنی است؟

فعالیت

- درشکل مقابل مختصات نقاط A, A', F, F', M و M' داده شده، با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه، طول‌های $|MF|, |MF'|$ و $|AA'|$ را دریافت کنید.
- حاصل تفریق $|MF|-|MF'|$ را به دست آورید.
- حاصل تفریق $|MF|-|M'F'|$ و $|AA'|$ را باهم مقایسه کنید.
- به همین ترتیب مراحل فعالیت فوق را برای نقطهٔ M' تطبیق کنید.
- حاصل تفریق $|MF|-|MF'|=2a$ و $|M'F|-|M'F'|$ را با یکدیگر مقایسه کنید.



بعد از انجام فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف: محل هندسی تمام نقاطی که تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ داده شدهٔ مستقر مساوی به یک طول ثابت باشد به نام‌هایپربولا (Hyperbola) یاد می‌شود؛ یعنی: $|MF'|-|MF|=|AA'|=2a$

در شکل F و 'F محراق‌های هایپربولا، M و 'M دو نقطهٔ کیفی آن می‌باشد.

نقطهٔ وسطی $\overline{FF'}$ مرکز هایپربولا بوده و فاصله بین مرکز و هر یک از رأس‌ها را به a و فاصله بین مرکز و هر یک از محراق‌ها را c می‌نامند.

$\overline{AA'}=2a$ و $\overline{FF'}=2c$

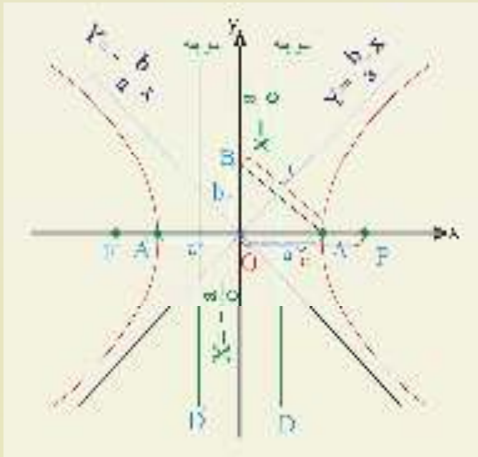
محورهای تناظر، و رأس‌های هایپربولا

هایپربولا مانند بیضوی دو محور تناظر دارد. که یکی از آن‌ها به محور $\overline{FF'}$ منطبق بوده و دیگر آن ناصف عمودی $\overline{FF'}$ است. محل تقاطع دو محور را مرکز تناظر یا مرکز هایپربولا می‌گویند. محور تناظر که از $\overline{FF'}$ می‌گذرد به نام محور متقاطع (Transverse axis) یاد می‌شود؛ زیرا هایپرابولا را در دو نقطهٔ A و A′ قطع می‌کند. این دو نقطه را رأس‌های حقیقی هایپربولا نامیده می‌شود. فاصلهٔ بین آن‌ها عبارت از: $|AA'| = 2a$ است.

محور تناظر که ناصف عمودی $\overline{FF'}$ می‌باشد و هایپربولا را قطع نمی‌کند، به نام محور مزدوج (Conjagate axix) یاد می‌شود. دو نقطهٔ B و B′ را روی این محور در دو طرف مرکز طوری در نظر می‌گیریم که $\overline{OB} = \overline{OB'} = b$ باشد، این دو نقطه رأس‌های غیر حقیقی هایپربولا گفته می‌شود و فاصله بین آن‌ها $|BB'| = 2b$ است.

دریک هایپربولا رابطهٔ بین طول‌های b, a و c قرار زیر می‌باشد. $c^2 = a^2 + b^2$

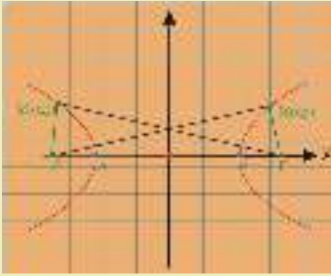
عن المرکزیت: چون در هایپربولا $c > a$ می‌باشد؛ پس $e > 1$ بوده، رابطه بین c, b, a و عن المرکزیت $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ است. با استفاده از رابطه $e = \frac{c}{a}$ آن را به دست آورید.



تمرین

یک شکل هایپربولا را رسم کنید و در آن مرکز، محراق ها، راس‌های حقیقی و غیر حقیقی، محور متقاطع و مزدوج هایپربولا را در آن نشان دهید.

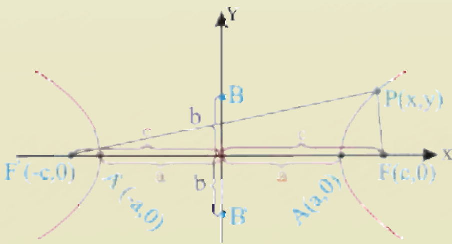
معادلهٔ هایپربولا



آیا هایپربولای را رسم نموده می‌توانید که مرکز آن در مبدا کمیاب وضعیه باشد؟

فعالیت

- هایپربولایی را رسم نمایید که مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیهٔ قایم باشد.
- نقطهٔ $P(x,y)$ را بالای یکی از شاخهٔ منحنی هایپربولا انتخاب نموده و آن را به F و F′ وصل کنید.
- رابطهٔ تعریف هایپربولا را بین نقاط P ، F و F′ بنویسید.
- با استفاده از فورمول فاصله بین دونقطه، طول‌های PF و PF′ را دریافت کنید. و آنرا در رابطهٔ تعریف هایپربولا قرار دهید.



برای دریافت معادلهٔ هایپربولا نظر به تعریف داریم:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

و یا

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بعد از مربع ساختن اطراف مساوات داریم:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\quad /\div 4$$

$$\Rightarrow\ cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

باز هم اطراف مساوات را مربع می‌سازیم:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

طوری که در هایپربولا رابطهٔ $c^2=a^2+b^2$ وجود دارد؛ پس $c^2-a^2=b^2$ می‌شود، در این صورت معادلهٔ فوق را طور زیر می‌نویسیم.

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \; / \div a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

را بطهٔ اخیرمعادلهٔ هایپربولا است که مرکز آن در مبدا کمیات وضعیه قرار داشته ومحراق‌های آن بالای محور افقی x قرار دارند.

حا لت دوم : هرگاه محور متقاطع هایپربولا $\overline{AA'}$ بالای محور y قرار گیرد معادله هایپربولا عبارت است از:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

گراف رابطهٔ اخیر را رسم، فورمول آن را ثبوت و مختصات محراق‌ها و رأس‌ها را دریافت کنید.

خطوط موجه هایپربولا

درصورتی که محراق‌های هایپربولا بالای محور x ویا y قرار داشته باشند، در این صورت می‌توانیم بنویسیم که: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

از این سبب می گوییم که موجه‌ها خطوط عمود، بالای محور متقاطع اند که فاصله آن از مرکز هایپربولا $\pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{a}{e}$ باشد.

معادلات خطوط موجهٔ هایپربولا که محراق‌هایش روی محور y قرار دارند، عبارت از $y = \pm\frac{a}{e}$ اند.

معادلات خطوط موجه(خطوط هادی) هایپربولا که محراق‌هایش روی محور x قرار دارند، عبارت از $x = \pm\frac{a}{e}$ می‌باشد.

مجانب‌های هایپربولا

خطوط مستقیمی که از مرکز هایپربولا گذشته به منحنی‌های هایپربولا در لایتناهی مماس باشند به نام مجانب‌های هایپربولا یاد می‌شوند.

معادلهٔ هایپربولا $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ را درنظر می گیریم.

$$y^2a^2 = x^2b^2 - a^2b^2$$

$$y^2a^2 = b^2(x^2 - a^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1 - \frac{a^2}{x^2}) \quad \right]$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

در رابطهٔ فوق اگر x به لایتناهی تقرب کند، کسر $\frac{a^2}{x^2}$ به طرف صفر نزدیک گردیده؛ درنتیجه $(1-\frac{a^2}{x^2})$ به عدد یک تقرب می‌نماید. در این صورت $y=\pm\frac{b}{a}x$ حاصل می‌گردد که عبارت از معادلات مجانب‌های هایپربولا است که محراق‌های آن بالای محور x قرار داشته باشند، درصورتی‌که محراق‌ها بالای محور y قرار داشته باشند معادلات مجانب‌های آن عبارت از $y=\pm\frac{a}{b}x$ اند.

مثال 1: از معادلهٔ هایپربولا $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ مختصات محراق، مختصات رأس‌ها معادلات خطوط موجه و مجانب‌ها را دریافت وگراف آن را رسم کنید.

حل: مختصات رأس‌ها: $a^2=16 \Rightarrow a=\pm4 \Rightarrow A(4،0)$ ، $A'(-4،0)$

$$b^2=4 \Rightarrow b=\pm2 \Rightarrow B(0،2) ، B'(0، -2)$$

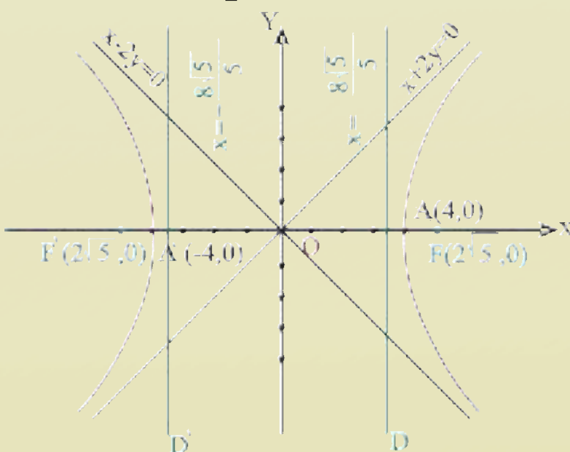
مختصات محراق‌ها: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\pm2\sqrt{5}$

$$F(2\sqrt{5}، 0) ،F'(-2\sqrt{5}، 0)$$

معادلات خطوط موجه: چون محراق‌ها بالای محور x قرار دارند؛ بنابرآن: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$

معادلات مجانب‌ها:

$$y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\pm\frac{2}{4}x$$
$$x=\pm2y \Rightarrow x+2y=0 ، x-2y=0$$



مثال 2: معادلهٔ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ یک معادلهٔ هایپربولا است. کمیات وضعیه محراق‌ها، رأس‌ها، معادلات خطوط موجه و مجانب‌ها را به دست آورده گراف آن را رسم نمایید.

حل: معادلهٔ فوق معادله هایپربولایی است که مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه و محور متقاطع آن بالای محور y قرار دارد.

مختصات رأس‌ها: $a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \Rightarrow \; A(0\,,2)\;\; A'(0,-2)$

$b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3 \;\; \Rightarrow \; B(3\;,0)\;,\; B'(-3\;,0)$

مختصات محراق‌ها: $c^2=a^2+b^2 \;\;\Rightarrow\; c^2=4+9=13 \Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

$F(0، \sqrt{13})$ ،$F\;'(0\;,-\sqrt{13})$

معادلات خطوط موجه: طوری که محور متقاطع بالای محور y منطبق است؛ پس معادلات خطوط موجه عبارت اند از:

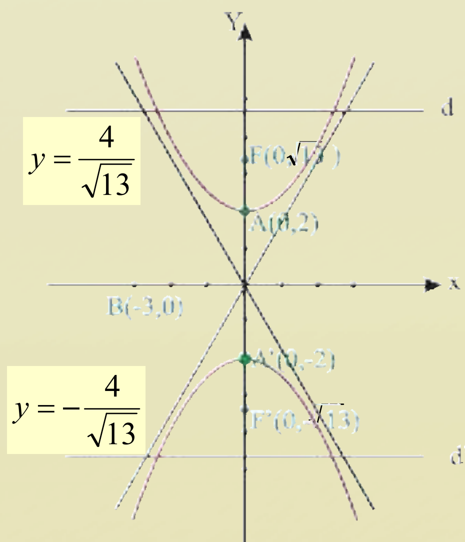
$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

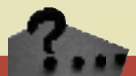
$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\;,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

معادلات مجانب‌ها: چون محور متقاطع بالای محور y منطبق است، پس معادلات مجانب‌های آن عبارت اند از:

$$y=\pm\frac{a}{b}x \;\;\Rightarrow\;\; y=\pm\frac{2}{3}x$$

$$\Rightarrow\;\; 3y=\pm 2x \;\;\Rightarrow\;\; 3y+2x=0 \quad , \qquad 3y-2x=0$$





تمرین

از معادلهٔ هایپربولای $4x^2-y^2=16$ کمیات وضعیهٔ محراق‌ها، رأس‌ها، معادلات خطوط موجه و مجانب‌ها را به دست آورده گراف آن را رسم نمایید.

معادلهٔ هایپربولایی که مرکز آن یک نقطهٔ اختیاری باشد

آیا معادله‌یی برای هایپربولا وجود دارد که مرکز آن مبدأی کمیات وضعیهٔ قایم نباشد؟

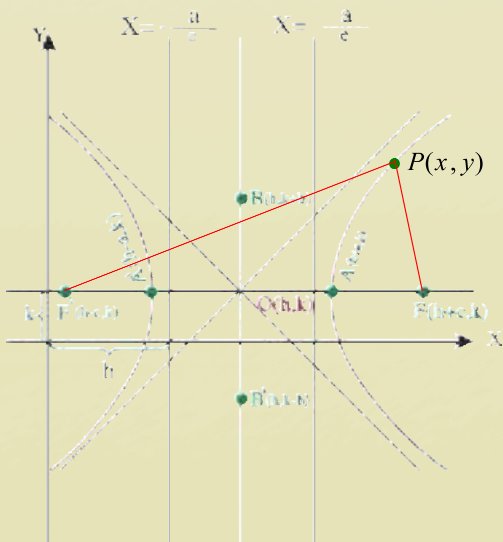
$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- درسیستم کمیات وضعیهٔ قایم، هایپربولای را رسم کنید که مرکز آن در نقطهٔ (h,k) و محور متقاطع آن موازی به محور x باشد.
- یک نقطهٔ کیفی $P(x,y)$ را روی هایپربولا در نظر گرفته و آن را به F و F' وصل کنید.
- بادرنظر داشت مرکز هایپربولا (h,k) مختصات محراق‌ها F و F' رأس‌ها A,A' و B,B' را در شکل نشان دهید
- با استفاده از شکل، رابطهٔ $|PF'|-|PF|=2a$ را حساب کنید.

حالت اول: با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطهٔ و رابطهٔ تعریف هایپربولا می‌توان نوشت:



$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

اطراف مساوات فوق را مربع می‌سازیم.

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)^2]+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

بعد از جمع و تفریق حدود مشابه می‌توان نوشت:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

بعد از ضرب و رفع توان‌ها، حدود مشابه را باهم جمع نموده و به طور زیر می‌نویسیم:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

چون $c^2-a^2=b^2$ است؛ پس رابطه را طور زیر می‌نویسیم:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

اطراف مساوات را به a^2b^2 تقسیم می کنیم:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

مختصات رأس‌های حقیقی: $A(h+a,k)\quad,\quad A'(h-a,k)$

مختصات رأس‌های غیرحقیقی: $B(h,k+b)\quad,\quad B'(h,k-b)$

مختصات محراق‌ها: $F(h+c,k)\quad,\quad F'(h-c,k)$

معادلات مجانب‌ها: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

معادلات خطوط موجه: $x-h=\pm\frac{a}{e}$

حالت دوم: اگر محور متقاطع موازی به محور y باشد،

معادلهٔ هایپربولا عبارت است از:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

از روی شکل مختصات رأس‌ها، محراق‌ها، معادلات خطوط موجه و مجانب‌ها را دریافت نمایید.

یادداشت: به یاد داشته باشید که معادلهٔ انکشاف یافتهٔ $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ هنگامی معادلهٔ هایپربولا است که $A,B\neq 0$ و $A=B$ یا $A\neq B$ بوده، اما مختلف الاشاره باشند.

مثال 1: معادلهٔ $9(x-3)^2-4(y+1)^2=144$ را درنظر گرفته مختصات مرکز، رأس‌ها، محراق‌ها و معادله مجانب‌های آن را بنویسید.

حل: معادله داده شده را به شکل معادله معیاری می‌نویسیم.

$$\frac{9(x-3)^2}{144}-\frac{4(y+1)^2}{144}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

مختصات رأس‌ها:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$A(3+4، \ -1) = A(7، -1)$$

$$A'(3-4، \ -1) = A'(-1 ، -1)$$

$$b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$$
$$B(3 ، \ 6-1) = B(3، \ 5) \ ، B\ '(3 \ ، -6-1) = (3 \ ، \ -7)$$

مختصات محراق‌ها:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$
$$F(\sqrt{52}+3 \ ، \ -1) ، F\ '(-\sqrt{52}+3 \ ، -1)$$

معادلات مجانب‌ها:

$$y = \pm\frac{b}{a}(x-h)+k \Rightarrow \ y = \pm\frac{6}{4}(x-3)-1$$

$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1 \ /\cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3)-2$$
$$2y = 3(x-3)-2 \quad \Rightarrow \ 2y = 3x-11$$
$$2y = -3(x-3)-2 \ \ \Rightarrow \ 2y = -3x+7$$

مثال 2: معادلهٔ هایپربولای $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ را در نظر گرفته کمیات وضعیهٔ مرکز، محراق‌ها، رأس‌ها و معادلات خطوط موجه و مجانب‌ها را به دست آورید.

حل:

$$2(x^2-4x) - 3(y^2-6y) - 31 = 0$$
$$2\left[x^2-4x+2^2-2^2\right] - 3\left[y^2+6y+3^2-3^2\right] - 31 = 0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right] - 3\left[(y+3)^2-9\right] - 31 = 0$$
$$2(x-2)^2 - 8 - 3(y+3)^2 + 27 - 31 = 0$$
$$2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 - 12 = 0$$
$$2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 = 12$$

اطراف معادلهٔ فوق را تقسیم عدد 12 می‌نماییم:

$$= \frac{2(x-2)^2}{12} - \frac{3(y+3)^2}{12} = \frac{12}{12} \ \ \Rightarrow \ \frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

معادلهٔ فوق به حالت استندرد تبدیل شده است، دیده می‌شود که کمیات وضعیهٔ مرکز آن $h=2$ و $k=-3$ یعنی $O(2,-3)$ است.

$$b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2 \quad , \quad a^2=6 \Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6+4}=\sqrt{10}$$

مختصات محراق‌ها:

$$F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$$

مختصات رأس‌های حقیقی:

$$A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$$

مختصات رأس‌های غیرحقیقی:

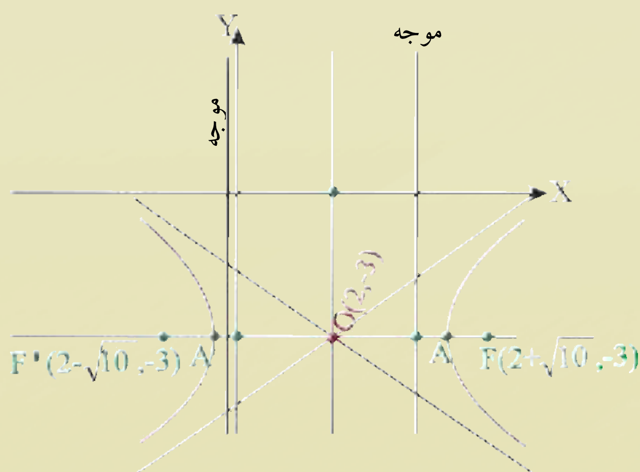
$$B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$$

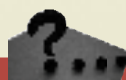
معادلات خطوط موجه:

$$x-h=\pm\frac{a}{e} \Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$$

معادلات مجانب‌ها:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3/.\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{6}y=\pm 2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0$$
$$\sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0$$



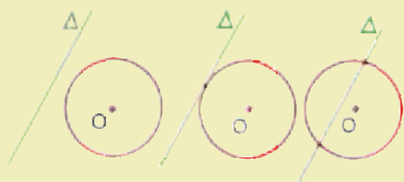


تمرین

1− معادلهٔ $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ را به معادلهٔ معیاری هایپربولا تبدیل کنید.

حالات نسبی یک خط مستقیم نظر به مقاطع مخروطی

یک خط مستقیم اختیاری، در صورت امکان یک دایره را در چند نقطه قطع می کند؟



فعالیت

دایرهٔ O و خط مستقیم Δ را در نظر بگیرید.

- یک دایره و یک خط مستقیم را طوری رسم کنید، که تنها یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.
- آیا امکان دارد که یک خط مستقیم و یک دایره زیادتر از دو نقطهٔ یکدیگر را قطع کنند؟
- اگر فاصله بین خط مستقیم و مرکز دایره بزرگتر از شعاع دایره باشد، دایره و خط مستقیم چند نقطهٔ مشترک دارند؟

از فعالیت بالا نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

نتیجه: یک خط مستقیم اختیاری و دایره در یک مستوی امکان دارد یک، دو و یا هیچ نقطه مشترک داشته باشند.

مثال 1: دایره $x^2+y^2=9$ و خط مستقیم $y=x+3$ را رسم نموده و موقعیت آن را تعیین کنید.

حل: در شکل دیده می‌شود، دایره و خط مستقیم یکدیگر را در دو نقطهٔ (0،3) و (-3,0) قطع می‌کنند. برای به دست آوردن این نتیجه قیمت y از معادله خط مستقیم را در معادله دایره وضع کرده نتیجهٔ بالا به دست می‌آید.

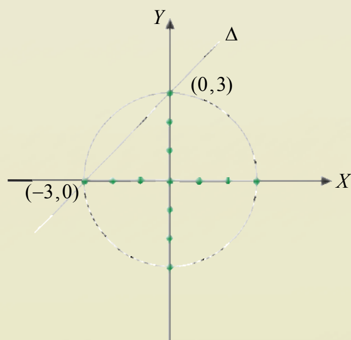
$$y=x+3$$
$$x^2+y^2=9 \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9 \quad \Rightarrow \quad x^2+x^2+6x+9-9=0$$
$$\Rightarrow 2x^2+6x=0 \Rightarrow x_1=0 \;\; , \; x_2=-3$$

قیمت x را در معادلهٔ $y=x+3$ وضع نموده قیمت y را به دست آورید.

$$y=0+3 \quad \Rightarrow y_1=3$$
$$y_2=-3+3 \quad \Rightarrow y_2=0$$

نقطه(0،3) و (-3,0) نقاط تقاطع دایره و خط مستقیم اند.

به صورت عمومی وقتی که خط مستقیم را از جنس متحول x و یا y در معادلهٔ مقاطع مخروطی قرار دهیم، بعد از تعویض، حل معادلهٔ درجه‌دوم به دست می‌آید که حل آن مربوط به قیمت Δ است. با استفاده از مناقشه برای Δ نظر به معلومات گذشته می‌توانیم طور زیر نتیجه‌گیری کنیم.



1- اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو حل دارد. بدین ترتیب خط و منحنی یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

2- اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای دو جذر مضاعف و یا مساوی بوده، که بدین ترتیب خط و منحنی مقاطع مخروطی تنها با هم یک نقطه مشترک دارند.

3- اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله حل ندارد، به عبارت دیگر خط مستقیم و منحنی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مثال2: معادلهٔ دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ و خط $3y - 4x - 15 = 0$ را در نظر گرفته موقعیت های‌شان را نظر به یکدیگر بررسی کنید.

حل: نخست معادلهٔ دایره را به شکل معیاری آن تبدیل می‌نمایم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \ , \ c(1,-2)$$

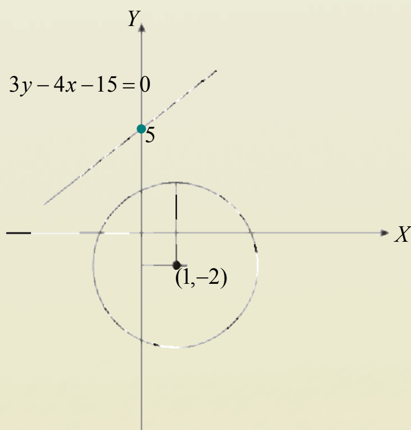
از معادله معیاری دایره می‌دانیم که مرکز آن (1,-2) و شعاع آن $x = 3$ است.

به همین ترتیب معادلهٔ خط مستقیم را به شکل معیاری تبدیل می‌نمایم.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

اگر از معادلهٔ خط مستقیم قیمت y را از جنس x در معادلهٔ معیاری دایره وضع کنیم، به دست می‌آید.

$$(x-1)^2 + (\frac{4}{3}x + 5 + 2)^2 = 9$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + (\frac{4}{3}x + 7)^2 = 9$$



$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}x^2 + 14\frac{4}{3}x + 49 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2 - 9\cdot\frac{50}{3}x + 9\cdot 41 = 0$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 150x + 369 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 22500 - 36900 = -14400 < 0$$

چون $\Delta < 0$ است، پس خط و دایره نقطهٔ مشترک ندارد.

مثال3: موقعیت خط $y = x - 1$ و پارابولا $y - x^2 + 1 = 0$ را تحقیق کنید.

حل:

$$y = x - 1$$

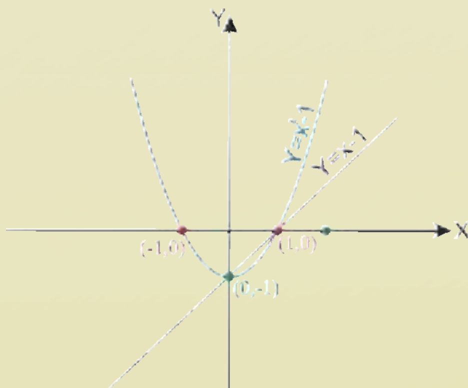
$$y - x^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad (x-1) - x^2 + 1 = 0$$

$$x - 1 - x^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x^2 - x = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)\cdot 0 = 1 - 0 \Rightarrow \quad \Delta = 1 \quad , \quad \Delta > 0$$

قیمت y را از معادلهٔ فوق در معادلهٔ پارابولا وضع می‌کنیم. در آن صورت داریم:

چون $\Delta > 0$ است پس خط $y = x - 1$ پارابولا $y - x^2 + 1 = 0$ را در دو نقطه قطع می‌کند. حل آن را می‌توان به شکل زیر دریافت کرد.



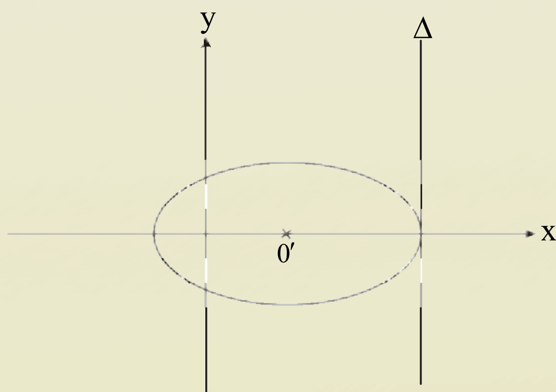
$$x^2 - x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 1}{2} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 0$$

اگر قیمت‌های به دست آمده را در معادلهٔ خط مستقیم وضع کنیم، نقاط تقاطع خط مستقیم و پارابول به دست می‌آید که عبارت اند از: نقاط $(1,0)$، $(0,-1)$ که در شکل به صورت واضح دیده می‌شود.

مثال4: موقعیت خط مستقیم $x = 5$ و بیضوی که معادلهٔ آن عبارت است از $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ است، را تحقیق کنید.

حل: اگر قیمت خط مستقیم $x=5$ را در معادلهٔ بیضوی وضع کنیم، در آن صورت به دست می‌آید.



$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow\frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow\frac{y^2}{4}=1-1\Rightarrow y^2=0$$

چون $\Delta=b^2-4ac=0$ است به این ترتیب گفته می‌توانیم که خط مستقیم و بیضوی یک نقطهٔ مشترک دارند که در شکل به صورت واضح دیده می‌شود.

یادداشت: معادلهٔ انکشاف یافته مقاطع مخروطی به شکل زیر است.

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$
$$A,B,D,E,F\in IR$$

برای شناخت معادلهٔ فوق به یاد داشته باشید که:

1- اگر $A=B$ و هم‌علامت باشند، معادلهٔ یک دایره است.

2- اگر $A\neq B$ و هم‌علامت باشند، معادلهٔ یک بیضوی است.

3- اگر $A=B$ یا $A\neq B$ علامت‌های مختلف داشته باشند، هایپربولا است.

4- اگر معادله اشکال زیر را داشته باشد، معادله پارابولا است.

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0\quad,\quad Ay^2+By+Cx+D=0$$



تمرین

1- نوعیت معادلات داده شدهٔ زیر را بعد از ترسیم گراف آن‌ها مشخص کنید.

a) $y^2-2y+x+3=0$ b) $9x^2+9y^2=27$

c) $25x^2+16y^2=400$ d) $x^2-y^2=0$

e) $y^2+6y-x+2=0$

2- بیضوی $9x^2+4y^2=36$ و خط مستقیم $y=3$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

3- نقطه و یا نقاط تقاطع هایپربولای $x^2-2y^2=4$ و خط $y=x$ را دریافت کنید.

نکات مهم فصل اول

مقاطع مخروطی: تقاطع مستوی با مخروط در حالت‌های مختلف منحنی‌هایی را به وجود می‌آورد که به نام مقاطع مخروطی یاد می‌شوند.

بیضوی: محل هندسی تمام نقاطی که مجموعهٔ فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ مستقر مساوی به یک طول ثابت باشند به نام بیضوی یاد می‌شود. نقاط مستقر را محراق‌های بیضوی گویند و به F و 'F نشان داده می‌شوند و طول ثابت عبارت از: $|AA'|=2a$ می‌باشد.

شماره	معادلات	کمیات وضعیه مرکز	انجام‌های قطر کبیر	انجام‌های قطر صغیر	محراق‌ها
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	(0,0)	$(a,0),(-a,0)$ بالای محور x قرار دارند.	$(0,b),(0,-b)$ بالای محور y قرار دارند.	$(c,0),(-c,0)$
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	(0,0)	$(0,a),(0,-a)$ بالای محور y قرار دارند.	$(b,0),(-b,0)$ بالای محور x قرار دارند.	$(0,c),(0,-c)$
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ بالای قطر کبیر که موازی به محور x است.	$(h,k\pm b)$ بالای قطر صغیر که موازی به محور y است.	$(h\pm c,k)$
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ بالای قطر کبیر که موازی به محور y است.	$(h\pm b,k)$ بالای قطر صغیر که موازی به محور x است.	$(h,k\pm c)$

معادلهٔ عمومی بیضوی عبارت از $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ است در صورتی که A و C هم علامت باشند.

پارابولا: محل هندسی آن نقاطی که در مستوی واقع بوده و از یک نقطهٔ ثابت و یک خط مستقیم فاصله‌های مساوی داشته باشند به نام پارابولا یاد می گردد.

نقطه ثابت را محراق (F) و خط مستقیم D را به نام خط هادی یا موجهٔ پارابولا می‌نامند.

معادلات محور تناظر	معادله خط موجه	مختصات محراق‌ها	کمیات وضعیهٔ رأس	معادلات پارابولا	شماره
$y=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4px$	1
$x=0$	$y=-p$	$F(0,p)$	$S(0,0)$	$x^2=-4py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4p(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4p(y-k)$	4

معادلهٔ عمومی پارابولا عبارت از $Ax^2+cy^2+Dx+Ey+F$ است در صورتی که ضریب A یا C صفر باشد، نه هر دو آن، عن المرکزیت در پارابولا $e=1$ است.

هایپربولا: محل هندسی نقاطی که تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ مستقر مستوی مساوی به یک طول ثابت باشد به نام هایپربولا یاد می‌شود.

معادلات مجانب ها	معادله خطوط موجه	مختصات محراق‌ها	انجام رأس‌های غیر حقیقی	انجام رأس‌های حقیقی	کمیات وضعیه مرکز	معادلات هایپربولا
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ بالای محور x قرار دارند.	$(0,b),(0,-b)$ بالای محور y قرار دارند.	$(a,0),(-a,0)$ بالای محور x قرار دارند.	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$	$F(0,\pm c)$ بالای محور y قرار دارند.	$(b,0),(-b,0)$ بالای محور x قرار دارند.	$(0,a),(0,-a)$ بالای محور y قرار دارند.	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

معادلهٔ عمومی هایپربولا عبارت از $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ است در صورتی که $A=B$ یا $A\neq B$ ولی دارای علامت‌های مختلف باشند. عن المرکزیت $e>1$ است.



تمرین فصل اول

برای هر سوال چهار جواب داده شده است، جواب صحیح را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1- مستوی که به‌طور مایل مخروط را قطع کند، فصل مشترک مستوی و مخروط عبارت است از:

a- بیضوی　　b- دایره　　c- هایپربولا　　d- دو خط متقاطع

2- محراق‌های بیضوی نقاطی‌اند که از مرکز بیضوی:

a- فاصله‌های مساوی دارند.　　b- فاصله‌های مختلف دارند.

c- به اندازهٔ نصف قطر بزرگ فاصله دارند.　　d- به اندازهٔ نصف قطر کوچک فاصله دارند.

3- اگر M یک نقطهٔ بیضوی F و F′ محراق‌ها و 2a طول قطر کبیر آن باشد. در این صورت داریم که:

a) $|MF|-|MF'|=2a$　　b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$　　d) $|MF'|+|MF|=0$

4- عن المرکزیت یک بیضوی توسط کدام رابطهٔ زیر به دست می‌آید؟

a) $e=\dfrac{a}{c}$　　b) $e=\dfrac{c}{a}$　　c) $e=\dfrac{b}{c}$　　d) $e=\dfrac{c}{b}$

5- در بیضوی رابطه بین فاصلهٔ محراقی و قطر صغیر و قطر کبیر عبارت است از:

a) $a^2=b^2-e^2$　　b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$　　d) $a^2=b^2+c^2$

6- در معادلهٔ $(y-k)^2=4p(x-h)$ اگر $P>0$ باشد.

a- پارابول به طرف بالا باز است.　　b- پارابولا به طرف پایین باز است.

c- به طرف راست باز است.　　d- به طرف چپ باز است.

7- هرگاه معادله پارابولا $(x+1)^2=8(y-2)$ را داشته باشیم، کمیات وضعیهٔ محراق آن عبارت است از:

a) $F(-1-2)$　　b) $F(-1,4)$　　c) $F(-1,\ 2)$　　d) $F(4,-1)$

8- اگر نقاط F,F' محراق‌های هایپربولا باشد، تحت کدام شرط نقطه p یک نقطهٔ از محیط هایپربولا بوده می‌تواند.

$a)\ |PF|-|PF'|=a$ $\qquad b)\ |PF|+|PF'|=2a$

$c)\ |PF|+|PF'|=0$ $\qquad d)\ |PF|+|PF'|=2a$

9- گراف پارابولایی $y=x^2$ نظر به کدام محور متناظر است ؟

a- نظر به محور y $\qquad$ b- نظر به محور x

c- نظر به محور x و y $\qquad$ d- نظر به مبدأ کمیات وضعیه

10- کدام یکی از جوابات زیر عن‌المرکزیت هایپربولا را نشان می‌دهد؟

$a)\ e<1$ $\qquad b)\ e=-1$ $\qquad c)\ e>1$ $\qquad d)\ e=1$

11- موقعیت قطر طول بیضوی $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ عبارت اند از:

a- بالای محور y $\qquad$ b- بالای محور x

c- موازی به محور x $\qquad$ d- موازی به محور y

12- محل هندسی نقاطی که در یک مستوی از یک نقطهٔ ثابت متساوی‌الفاصله است به نام چه یاد می‌شود؟

a- کره $\qquad$ b- دایره

c- پارابولا $\qquad$ d- الپس

13- کمیات وضعیهٔ رأس پارابولای $y^2=-4(x+2)$ عبارت است از:

$a)\ (2,4)$ $\qquad b)\ (4,2)$ $\qquad c)\ (2,0)$ $\qquad d)\ (-2,0)$

14- معادلهٔ $4x^2+4y^2+8y+3=0$ به کدام یک از مقاطع مخروطی تعلق دارد:

a- دایره $\qquad$ b- الپس

c- پارابولا $\qquad$ d- هایپربولا

سؤالات زیر را حل نمایید.

1- معادلات زیر را در نظر گرفته، نخست آن‌ها را به حالت معیاری نوشته و بعد گراف آن‌ها را رسم نمایید:

$a)\ x^2+4y^2=4$ $\qquad b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$ $\qquad d)\ x^2+12x-120y+288=0$

2- مطابق شرایط داده شدهٔ زیر معادلات بیضوی را دریابید:

a- مرکز آن $(0,0)$ ، $a=-2$ ، $e=0.5$ بوده و قطر کبیر آن به امتداد محور y باشد.

b- مرکز آن $(0,0)$ ، $b=64$ ، $e=0.5$ بوده و قطرکبیر آن به امتداد محور x باشد.

3- در معادلات زیر قطر کبیر، قطر صغیر، مختصات رأس‌ها و مختصات محراق‌های بیضوی را دریافت کنید.

$a)\ 4(x-1)^2+y^2=4 \qquad b)\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

4- معادلات پارابولای زیر را به شکل معیاری آن آورده و گراف‌های آن‌ها را رسم نمایید.

$a)\ x^2-11y=0 \qquad b)\ y^2-4y-4x+2=0$

5- معادلات هر یک از هایپربولایی زیر را به شکل معیاری آن‌ها تبدیل نمایید.

$a)\ 4x^2-y^2-8y-32=0 \qquad b)\ 2y^2+4y-x^2+10x-25=0$

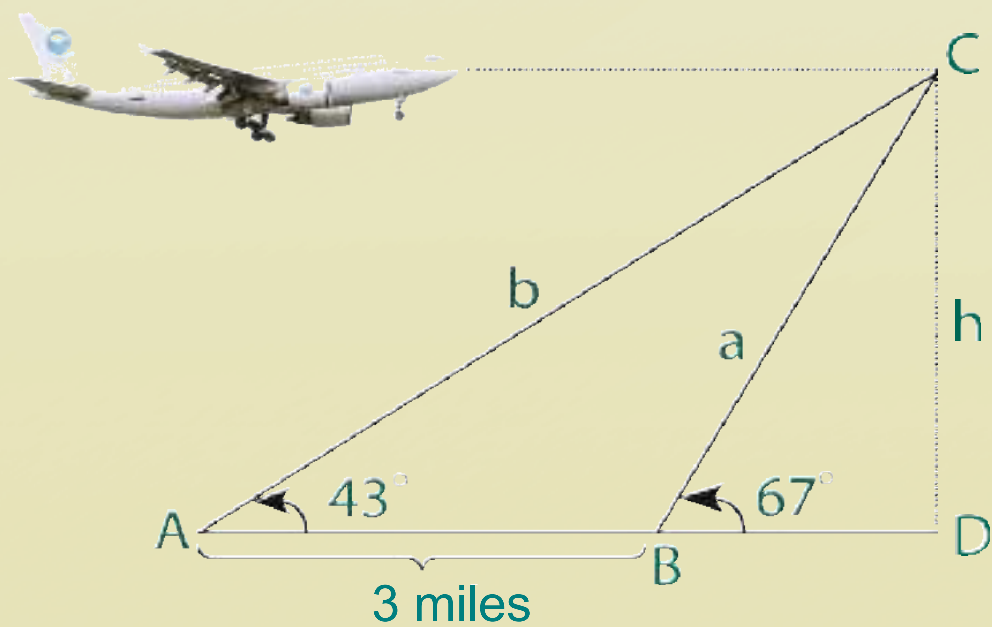
6- معادلهٔ هایپربولای را تشکیل دهید که رأس‌های حقیقی آن $(-4,0)$ $(4,0)$ بوده و معادلات مجانب‌های آن $y=\pm\dfrac{5}{4}x$ باشند.

7- معادلهٔ هایپربولا را تشکیل دهید که رأس‌های حقیقی آن $(-1,3)(1,3)$ بوده و طول بین محراق‌های آن 4 واحد باشد.

8- خط مستقیم $y=2x$ هایپربولای $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ را در چند نقطه قطع می‌کند.

فصل دوم

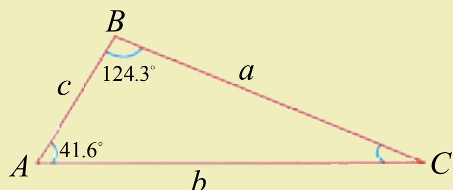
مثلثات


C
b
a
h
A
43°
B
67°
D
3 miles

قانون ساین

Law of sine

در شکل ذیل چطور می‌توانیم اندازۀ ضلع a و زاویۀ C را دریافت نماییم؟

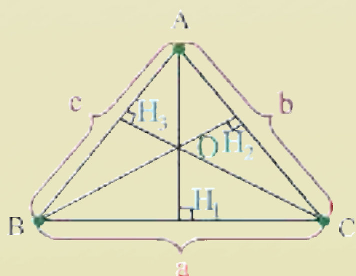


فعالیت

- یک مثلث حادالزاویۀ ABC را رسم کنید و طول اضلاع مثلث آن را تعین نمایید.
- از هر رأس مثلث به ضلع مقابل آن ارتفاعات AH_1 ، BH_2 و CH_3 را رسم کنید.
- در مثلث‌های قایم‌الزاویۀ ABH_1 و ACH_1 طول ارتفاع AH_1 را از جنس sinB و sinC دریافت و باهم مقایسه کنید.
- در مثلث‌های قایم‌الزاویۀ ABH_2 و BCH_2 طول ارتفاع BH_2 را از جنس sinA و sinC دریافت و باهم مقایسه کنید.

از فعالیت بالا می‌توان ثبوت زیر را به دست آورد.

ثبوت: در مثلث‌های قایم‌الزاویۀ ACH_1 و ABH_1 داریم:



$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B............ (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C.......... (2)$$

از مقایسۀ روابط (1) و (2) داریم: $c\sin B = b\sin C / \div bc$

و یا

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \text{I}$$

نظر به مثلث‌های قایم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABH_2}$ و $\overset{\Delta}{BCH_2}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_2}}{c} \Rightarrow \overline{BH_2} = c \sin A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_2}}{a} \Rightarrow \overline{BH_2} = a \sin C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

از مقایسهٔ روابط 3 و 4 داریم: $c \sin A = a \sin C / \div ac$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad II$$

از مقایسهٔ روابط I و II داریم: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

یا

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

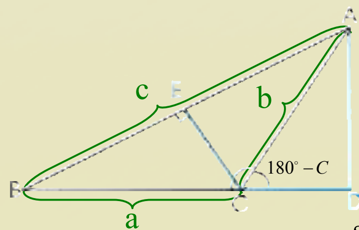
رابطهٔ فوق در یک مثلث به نام قانون ساین (law of sine) یاد می‌شود.

نتیجه: در هر مثلث ABC، درصورتی که زوایا و طول اضلاع آن به ترتیب (A,B,C) و (b,a و c)باشند، داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ثبوت قضیهٔ ساین در مثلث منفرج‌الزاویه

مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که زاویهٔ C آن منفرجه است. ارتفاعات AD و CE را رسم می‌نماییم.



در مثلث قایم الزاویهٔ ADC داریم: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

از طرف دیگر از نسبت‌های مثلثاتی زوایای متممه می‌دانیم که:

$$\sin(180^\circ - C) = \sin C$$

بنابراین:

$$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

همچنین در مثلث قایم‌الزاویهٔ ADB داریم :

$$\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

روابط 1 و 2 را طرف به طرف بالای همدیگر تقسیم می کنیم :

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$$

نظر به خواص تناسب جاهای وسطین را تغییر بدهیم:

$$\frac{\text{sinC}}{\text{c}} = \frac{\text{sinB}}{\text{b}} \text{ .... I}$$

حال از مثلث قایم‌الزاویه AEC نوشته کرده می‌توانیم که:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} \text{ .... (3)}$$

در مثلث قایم‌الزاویه BCE دیده می‌شود:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} \text{ .... (4)}$$

روابط 3 و 4 را طرف به طرف بالای همدیگر تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

اگر جاهای وسطین را تغییر بدهیم:

$$\frac{\text{sinA}}{\text{a}} = \frac{\text{sinB}}{\text{b}} \text{ .... II}$$

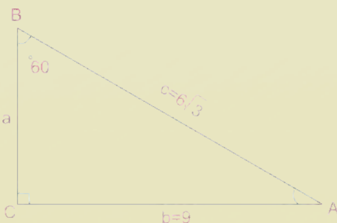
از مقایسهٔ روابط I و II نوشته کرده می‌توانیم که:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{sinA}}{\text{a}} = \frac{\text{sinB}}{\text{b}} = \frac{\text{sinC}}{\text{c}}$$

فعالیت

- قانون ساین را در مثلث قایم‌الزاویه ثبوت کنید.

مثال 1: در مثلث قایم‌الزاویهٔ زیر، قیمت یک ضلع و دو زاویهٔ آن را دریافت کنید. در صورتی که قیمت یک زاویه و دو ضلع آن داده شده است.



حل: با در نظرداشت قانون ساین می‌توان رابطهٔ زیر را چنین نوشت:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin C} = \frac{9}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

چون: $\sin 90^\circ = 1$ است؛ پس: $C = 90^\circ$ است.

می‌دانیم که در یک مثلث:

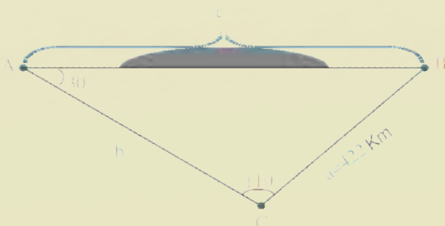
$$A+B+C=180^\circ$$
$$A=180^\circ-(B+C)$$
$$A=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)$$
$$A=180^\circ-150^\circ \Rightarrow A=30^\circ$$

به همین ترتیب قیمت ضلع a را دریافت می‌کنیم.

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=\frac{b\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{9.\sin 30}{\sin 60}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}cm$$

مثال 2: مطابق شکل زیر یک انجنیر ساختمانی می‌خواهد فاصله بین دونقطهٔ A و B را که بین آن‌ها یک تپه قرار دارد دریافت کند.

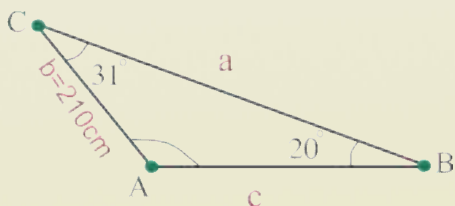


حل: با استفاده از قانون ساین رابطه بین $\sin C$ و $\sin A$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}$$
$$c=\frac{a.\sin C}{\sin A}=\frac{422\,ft\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

چون $\sin 110^\circ=0.9396$ و $\sin 30^\circ=0.5$ است؛ پس داریم:

$$c=\frac{422\cdot 0.9396}{0.5}ft\Rightarrow c=793.0224\,ft$$



مثال 3: در شکل مقابل اندازهٔ دو زاویه و یک ضلع آن داده شده است. اندازهٔ یک زاویه و دو ضلع دیگر آن را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است؛ پس می‌توانیم زاویهٔ نامعلوم را دریافت کنیم.

$$A = 180^\circ - (31^\circ + 20^\circ) \quad \Rightarrow \quad A = 180^\circ - 51^\circ$$

$$A = 129^\circ$$

برای دریافت طول ضلع a قانون ساین را در نظر می گیریم:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 129^\circ}{a} = \frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

چون $\sin 20^\circ = 0.342$ و $\sin 129^\circ = 0.7771$ است؛ بنابراین:

$$a = \frac{0.7771 \cdot 210cm}{0.342} = \frac{163.191cm}{0.342} = 477.166cm$$

$$a = 477.166cm$$

اندازهٔ ضلع c را از رابطهٔ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin 20^\circ}{210} = \frac{\sin 31^\circ}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{210cm \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

چون $\sin 31^\circ = 0.5150$ است؛ بنابراین داریم:

$$\Rightarrow c = \frac{210cm \cdot 0.5150}{0.342} = \frac{108.1500cm}{0.342} = 316.228cm$$



به یاد داشته باشید

از قانون ساین وقتی استفاده می‌شود که:

- اندازهٔ دو زاویه و یک ضلع مقابل زاویهٔ معلوم داده شده باشد؛ یعنی: (AAS)
- اندازهٔ دو ضلع و یک زاویهٔ مقابل یکی از اضلاع معلوم داده شده باشد؛ یعنی: (SSA)

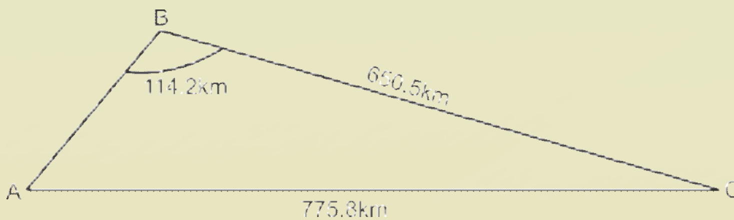
ناگفته نماند که A مخفف $Angle$ و S مخفف $Side$ می‌باشد.



تمرین

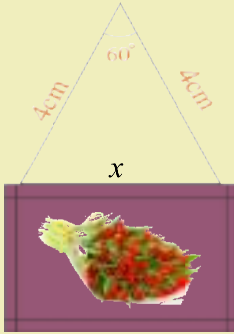
1- اگر قیمت اضلاع مثلث قایم الزاویه $a=8m$, $b=6m$ و $c=10m$ داده شده باشند اندازهٔ زاویه‌های آن را دریافت کنید.

2- شکل زیر را در نظر گرفته فاصله از شهر A تا شهر B را دریافت کنید..



قانون کوساین

Law of cosine

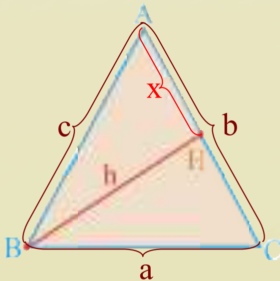


یک تصویر طبق شکل ذیل توسط تارها به میخ دیوار آویزان شده است، اگر طول تارهای دو طرف میخ هرکدام 4cm و زاویه بین آن‌ها 60° باشد، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ تار (x) را چطور دریافت کرده می‌توانیم ؟

فعالیت

- یک مثلث اختیاری ABC را رسم کرده، طول ضلع که مقابل رأس A قرار دارد به a، طول ضلع که مقابل رأس B قرار دارد به b وطول ضلع که مقابل رأس C قرار دارد به c نمایش دهید.
- از رأس B یک ارتفاع را بالای ضلع $\overline{AC}$ در نقطه H رسم کنید.
- در مثلث‌های قایم‌الزاویهٔ متشکله، قضیهٔ فیثاغورث را تطبیق کنید.
- در مثلث قایم الزاویهٔ ABC قیمت $\overline{AH}$ را از جنس کوساین زاویه $\hat{A}$ به دست آورده در رابطهٔ فیثاغورث وضع نمایید.
- محاسبات الجبری ممکنه را انجام داده رابطهٔ نهایی را بنویسید.

با در نظرداشت مراحل فعالیت فوق، یک مرحلهٔ قانون کوساین را ثبوت می‌کنیم.



ثبوت : در مثلث حادالزاویهٔ ABC ارتفاع BH را رسم می‌کنیم.

فرض می‌کنیم: $\overline{BH}=h$ ، $\overline{AH}=x$ و $\overline{CH}=b-x$ باشد

در مثلث قایم الزاویهٔ HBC داریم: $\overline{BC}^2=\overline{CH}^2+\overline{BH}^2$

$$a^2=(b-x)^2+h^2 \quad .... \text{ I}$$

در مثلث قایم الزاویهٔ HAB، طول h را دریافت می‌کنیم:

$$h^2=c^2-x^2$$

در رابطهٔ I به جای h^2 قیمت آن را وضع می‌نماییم:

$$a^2=(b-x)^2+c^2-x^2$$

$$a^2=b^2-2bx+x^2+c^2-x^2$$

$$a^2=b^2+c^2-2bx$$

درمثلث قایم الزاویهٔ AHB داریم:

$$\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

در رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ به جای x قیمت آن را وضع می‌کنیم.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ یا } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad ...I$$

نتیجه: برای یک مثلث اختیاری رابطه $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ یا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

به همین ترتیب می‌توان ثبوت کرد:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \longrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad ...II$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C \longrightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad ...III$$

در هر مثلث کوساین هر زاویهٔ آن مساوی است به مجموع مربعات دو ضلع مجاور منفی مربع ضلع غیرمجاور بر دو چند حاصل‌ضرب اضلاع مجاور آن زاویه.

فعالیت

- به کمک شکل مثلث صفحه قبلی رابطه‌های II و III قانون کوساین را ثبوت کنید.

یادداشت: از قانون کوساین وقتی استفاده می‌کنیم که:

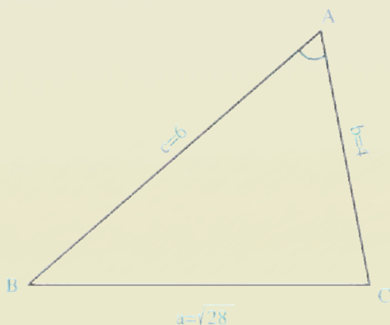
- اندازهٔ دو ضلع و یک زاویهٔ مابین دو ضلع معلوم باشد.(ضلع زاویه ضلع)(SAS)
- اندازهٔ سه ضلع مثلث معلوم باشد.(ضلع ضلع ضلع) (SSS)

استفاده از قانون ساین وکوساین برای دریافت اجزای یک مثلث

با استفاده از قانون ساین وکوساین جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

دریافت اجزای یک مثلث	
در صورتی که طول 3 ضلع یک مثلث معلوم باشد، از قانون کوساین استفاده می‌کنیم	(SSS) (ضلع ،ضلع، ضلع)
در صورتی که اندازهٔ دو زاویه و یک ضلع مقابل زاویه معلوم داده شده باشد، از قانون ساین استفاده می‌کنیم.	(SAA) (زاویه، زاویه،ضلع)
در صورتی که اندازهٔ دو ضلع و زاویه مقابل ضلع معلوم، داده شده باشد از قانون ساین استفاده می‌کنیم	(ASA) (زاویه، ضلع، زاویه)
در صورتی که دو ضلع و زاویه بین آن‌ها معلوم باشد، از قانون کوساین استفاده می‌کنیم.	(SAS) (ضلع، زاویه، ضلع)
ممکن نیست	(AAA) (زاویه، زاویه، زاویه)

مثال 1: درمثلث ABC اندازهٔ سه ضلع آن قرار زیر داده شده است. اندازهٔ زاویهٔ A را تعیین کنید.



$$a=\sqrt{28} \quad , \quad b=4 \quad , \quad c=6 \quad , \quad \hat{A}=?$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$

$$28=16+36-48\cos A$$

$$28=52-48\cos A$$

$$48\cos A=52-28 \Rightarrow 48\cos A=24$$

$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$

$$\hat{A}=60^\circ$$

مثال 2: اگر در یک مثلث ABC طول دو ضلع آن $a=16ft$, $b=10ft$ و زاویه بین آن‌ها $\hat{C}=110^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلع c را دریافت کنید.

حل : چون دو ضلع و یک زاویهٔ بین آن دو ضلع مثلث معلوم است از قانون کوساین استفاده می‌نماییم.



$$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$$

$$c^2=(10)^2+(16)^2-2(16)(10)\cos110^\circ$$

$$c^2=100+256-320\cos110^\circ$$

از جدول مثلثاتی می‌دانیم که: $\cos110^\circ=-0.342$

$$c^2=356-320(-0.342)$$

$$c^2=356+109.44$$

$$c^2=465.44 \Rightarrow c=\sqrt{465.44}$$

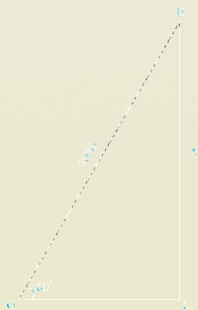
$$c=21.57$$

مثال 3: یک کاغذپران با طول تار 100m در هوا است. اگر تار کاغذپران با سطح افقی زمین زاویه 60° را بسازد، بلندی کاغذپران را از سطح زمین دریافت کنید.

حل : درمثلث قایم‌الزاویه OHL داریم:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}$$

$$x=100\cdot\cos60^\circ \qquad x=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$



از قانون کوساین داریم:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$
$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$
$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$
$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \Rightarrow HL = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$
$$\overline{HL} = 50\sqrt{3}\,m$$

مثال 4: در مثلث ABC اندازهٔ $\hat{A} = 60^\circ$ و طول $b = 5, c = 8$ واحد طول است، اندازهٔ ضلع a و $\sin C$ را دریافت کنید.

حل: نخست با استفاده از قانون کوساین اندازهٔ ضلع a و $\sin C$ را دریافت می‌کنیم:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$$
$$a^2 = (8)^2 + (5)^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 60^\circ$$
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$
$$a^2 = 64 + 25 - 80\cdot\frac{1}{2}$$
$a^2 = 89 - 40 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$ واحد طول

سپس با استفاده ازقانون ساین، sinC را دریافت می‌کنیم.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a}$$
$$\sin C = \frac{8\cdot\sin 60^\circ}{7}$$

چون $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ است، بنا بر آن:

$$\sin C = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$
$$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$





تمرین

1- در یک مثلث ABC هرگاه $a = 5ft$,$b = 4ft$ و $\hat{A} = 45^\circ$ داده شده باشند. اندازهٔ ضلع c و زوایای نامعلوم مثلث را دریافت کنید.

2- اگر در یک مثلث ضلع $a = 3cm$, $b = 9cm$ و زاویهٔ بین‌شان 60° باشد. اندازهٔ ضلع c چند است؟

قانون تانجنت

Law of Tangent

آیا در هر مثلث میان زاویه‌ها و اضلاع آن رابطه مقابل وجود دارد؟

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- رابطۀ قانون sin را بنویسید و آن را مساوی به D قرار دهید.
- هر نسبت این تناسب $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ را به صورت جداگانه مساوی به D قرار دهید.
- دو نسبت فوق را از جنس طول اضلاع آن‌ها بنویسید.
- دو رابطۀ فوق را یکبار باهم جمع و بار دیگر از هم تفریق کنید.
- روابط به دست آمده را یکی بالای دیگر تقسیم کنید.
- محاسبات الجبری را انجام داده فورمول نهایی را بنویسید.

بعد از انجام فعالیت نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه: در هر مثلث قانون تانجنت عبارت است از:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: دو نسبت رابطۀ قانون ساین را مساوی به D قرار می‌دهیم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{a}{\sin A}=D \quad , \quad \frac{b}{\sin B}=D$$

$$a=D\sin A \quad \dots \quad I$$

$$b=D\sin B \quad \dots \quad II$$

روابط فوق را یک بار طرف به طرف باهم جمع و بار دیگر طرف به طرف از همدیگر تفریق می کنیم:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

روابط فوق را یکی بالای دیگر تقسیم می کنیم:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

از فورمول‌های ضرب داریم که:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

چون $\cot\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}$ است؛ پس:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- دو رابطهٔ زیر را ثبوت کنید.

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

فورمول‌های فوق را به نام قانون تانجنت یاد می کنند.

مثال 1: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\hat{A}=90^\circ$ داده شده است، زوایای B و C را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم: که در هر مثلث.

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ$$

$$B+C=90^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

چون $\tan 45^\circ=1$ است؛ پس:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{B-C}{2}$$

می‌دانیم $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است؛ پس:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\frac{B-C}{2}=30^\circ$$

$$B-C=60^\circ ..... \quad (1)$$

$$B+C=90^\circ ..... \quad (2)$$

$$2B=150^\circ \Rightarrow B=75^\circ$$

حالا قیمت زاویهٔ C را دریافت می‌نماییم؛ پس به جای زاویهٔ B قیمت آن را در رابطهٔ (1) وضع می کنیم.

$$B-C=60^\circ \Rightarrow 75^\circ-C=60^\circ$$

$$75^\circ-60^\circ=C \Rightarrow C=15^\circ$$

مثال 2: اگر درمثلث ABC، $B=42^\circ 30'$ ، $a=925cm,\ c=432cm$ باشند، با استفاده ازقانون تانجنت اجزای نامعلوم مثلث را دریافت کنید.

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ 30'$$

$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30'$$

$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2} \Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ 45'$$

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}} \Rightarrow \frac{925+432}{925-432}=\frac{\tan 68^\circ 45'}{\tan\frac{A-B}{2}} \Rightarrow \frac{1357}{493}=\frac{\tan 68^\circ 45'}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow 1357 \cdot \tan\frac{A-C}{2} = 493 \cdot \tan 68^\circ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2} = \frac{493}{1357}.\tan 68^\circ 45'$$

از جدول مثلثاتی می‌دانیم که:

$$\tan 68^\circ\, 45' = 2.571$$

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363 \cdot 2.571 \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{A-C}{2} = 0.933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^\circ$$

$$\Rightarrow \quad A - C = 86^\circ$$

حالا می‌خواهیم زاویهٔ A را از روابط $A + C = 137^\circ\ \ 30'$ و $A - C = 86^\circ$ به دست آوریم.

$$A - C = 86^\circ$$

$$A + C = 137^\circ\ 30'$$

$$2A = 223^\circ\ \ 30 \qquad \Rightarrow 2A = 222^\circ\, 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

حالا می‌خواهیم زاویهٔ C را دریافت کنیم.

$$A + C = 137^\circ 30' = 136^\circ\ \ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

با استفاده از قانون ساین ضلع b را دریافت می‌کنیم.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c.\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432\frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ 45'}$$

قیمت‌های ساین زاویه‌ها را در رابطهٔ فوق وضع می کنیم

$$\sin 25^\circ\ \ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ\ \ 30' = 0.676$$

$$b = 432\frac{0.676}{0.434} = 672 \cdot 885$$



تمرین

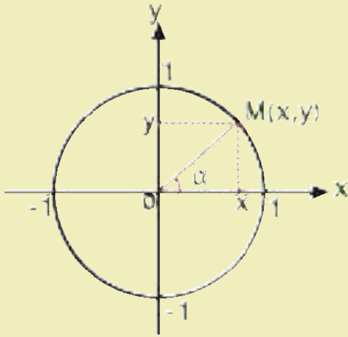
اجزای نامعلوم مثلث را با استفاده ازقانون تانجنت به دست آورید.

a - هرگاه $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$ باشد.

b - هرگاه $A = 45^\circ$, $b = 37cm$, $B = 75^\circ$ باشد.

مطابقت‌های مثلثاتی

Trigonometric Identities



شما می‌دانید که $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یک مطابقت الجبری است؛ زیرا به تمام قیمت‌های a و b دو طرف مساوات باهم مساوی اند.

آیا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ مطابقت مثلثاتی شده می‌تواند؟

فعالیت

- درجدول زیر قیمت افاده‌های مثلثاتی A و B را برای قیمت‌های مختلف زاویهٔ α تکمیل کنید:

α	$A = \frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$	$B = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

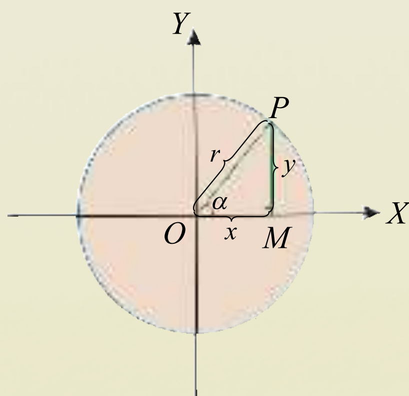
بعد از تکمیل جدول قیمت‌های A و B را باهم مقایسه کنید و رابطهٔ آن را بنویسید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف: مساوات مثلثاتی که برای تمام قیمت‌های زاویهٔ هر دو طرف مساوات، باهم مساوی شوند، به نام مطابقت مثلثاتی یاد می‌شود.

پس : $\frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$ یک مطابقت مثلثاتی است.

با تمام قیمت‌های زاویهٔ α دو طرف مساوات باهم مساوی می‌شوند.



مطابقت $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ را ثبوت کنید.

ثبـــوت: در دایـرهٔ $C(o,r)$ مثلـث قـایم‌الزاویـه $O\overset{\Delta}{M}P$ را رسم می‌نمایم و می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \text{ و } \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

نظر به قضیهٔ فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

اطراف رابطهٔ فوق را تقسیم r^2 می‌نماییم:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$(\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{r})^2 = 1$$

قیمت‌های $\frac{y}{r} = \text{sina}$ و $\frac{x}{r} = \text{cosa}$ را در رابطهٔ فوق وضع می کنیم؛ در نتیجه: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

روابط اساسی مثلثاتی عبارت اند از:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \quad , \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

روابط فرعی مثلثاتی عبارت اند از:

$$\cos\alpha.\sec\alpha = 1 \quad , \quad \sin\alpha.\sec\alpha = 1 \quad , \quad \tan\alpha.\cot\alpha = 1$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

از مطابقت‌های فوق، مطابقت $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ را ثبوت می کنیم.

ثبوت: از شکل می‌دانیم: $x^2 + y^2 = r^2$

اطراف رابطهٔ فوق را تقسیم x^2 می‌نماییم:

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$1 + (\frac{y}{x})^2 = (\frac{r}{x})^2$$

با قرار دادن قیمت‌های $\frac{r}{x} = \sec\alpha$ و $\frac{y}{x} = \tan\alpha$ می‌توانیم بنوسیم: $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

فعالیت

- با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی فوق ثبوت کنید که:

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

به طور عموم برای ثبوت مطابقت‌ها از یک طرف مطابقت، طرف دیگرآن را به دست می‌آورند؛ یعنی به یک طرف مطابقت عملیه‌های مختلف مانند مربع کردن، تجزیه کردن، ضرب و عملیه‌های دیگر اجرا می‌شود. تا اینکه طرف دیگر مطابقت به دست آید.

اگر حدود یک افادهٔ الجبری از جنس نسبت‌های مثلثاتی یک یا چند زاویه باشد.

آن را افادهٔ مثلثاتی می‌نامند. با استفاده از روابط مثلثاتی بعضی افاده‌های مثلثاتی را می‌توان ساده کرد.

برای روشن شدن موضوع، مثال‌های مطابقت‌های مثلثاتی زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال 1: افادهٔ $\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\tan\alpha$ را ساده کنید.

حل : افادهٔ فوق را به طریق زیر ساده می‌سازیم:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

مثال 2: افادهٔ $\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta$ را ساده نمایید.

حل:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta$$

$$=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}+\tan^2\beta$$

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$$

$$=1+\tan^2\beta$$

مثال 3: افادهٔ $(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)$ را از جنس $\cos\beta$ ارائه کنید.

حل:

$$(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)$$
$$=\cos^2\beta(1+\frac{1}{\cos^2\beta})$$
$$=\cos^2\beta(\frac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})$$
$$=\cos^2\beta+1$$

مثال 4: ثبوت کنید که: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل: قوس‌های طرف چپ را انکشاف می‌دهیم.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$
$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$
$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot1=2$$

مثال 5: مطابقت زیر را ثبوت کنید.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$
$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}$$
$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin(1+\cos A)}=\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$
$$=\frac{2+2\cos A}{\sin(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

مثال6: مطابقت زیر را ثبوت کنید.

$$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$$

حل: می‌دانیم:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$
$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad \Rightarrow \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=(\frac{\sin A}{\cos A})^2=\tan^2 A$$

مثال 7: مطابقت $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$ را ثبوت کنید.

حل: به جای $\cot\alpha$ و $\tan\alpha$ قیمت‌های آن‌ها را از جنس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ وضع می کنیم.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

بنابراین:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

مثال 8: مطابقت $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ را ثبوت کنید.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$
$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

مثال 9: مطابقت $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ را ثبوت کنید.

حل: می‌دانیم : $\sin^2\frac{x}{2}=(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2=\frac{1-\cos x}{2}$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}\Rightarrow\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

طرف راست رابطهٔ فوق را ضرب $\frac{\tan x}{\tan x}$ می‌نماییم:

$$=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

مثال 10: مطابقت $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ را ثبوت کنید.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}=2\cdot\sec x$$

$$=2\sec x$$

تمرین

1- با درنظرداشت روابط اساسی مثلثاتی، رابطهٔ معادل هر سؤال زیر را دریافت کنید:

$a)\ \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}$ $b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $c)\ \frac{1}{\cos 8^\circ}$

2- افاده‌های زیر را توسط $\sin\beta$ ارائه کنید:

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $b)\ \cot^2\beta$

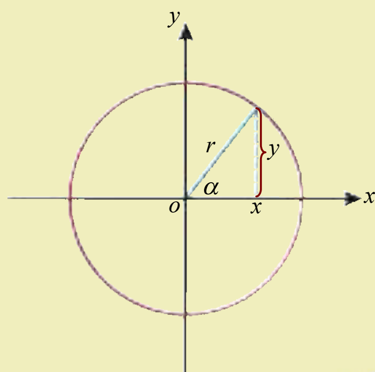
3- مطابقت‌های مثلثاتی زیر را ثبوت کنید:

$a)\ \frac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $b)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}=1-2\cos^2 x$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $d)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

معادلات مثلثاتی

Trigonometric Equations



می‌دانیم که $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یک مطابقت مثلثاتی است.

چطور نشان داده می‌توانید که $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ یک معادله یا یک مطابقت مثلثاتی است؟

فعالیت

- در جدول زیر قیمت‌های $1-2\sin\beta=0$ و $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ را برای قیمت‌های زاویهٔ β دریافت نمایید:

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

به قیمت‌های مختلف زاویهٔ β چه رابطه بین $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ و $1-2\sin\beta=0$ وجود دارد.

- آیا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ یک مطابقت است یا معادله؟
- آیا $1-2\sin\beta=0$ یک معادله است یا مطابقت؟

از فعالیت بالا تعریف زیر را می‌توان بیان کرد:

تعریف: آن مساوات مثلثاتی که برای بعضی از قیمت‌های زاویهٔ هر دو طرف مساوات باهم مساوی باشند، به نام معادلهٔ مثلثاتی یاد می‌شود.

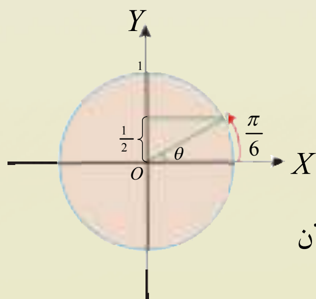
هر مطابقت مثلثاتی یک معادلهٔ مثلثاتی است؛ مگر هر معادلهٔ مثلثاتی مطابقت مثلثاتی شده نمی‌تواند.

هر معادله مثلثاتی را به کمک یکی از چهار حالت زیر می‌توان حل کرد.

حالت اول: معادلهٔ مثلثاتی: $a\sin x + b = 0$

برای دریافت جواب مناسب معادلهٔ بالا به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال 1: ست حل معادلهٔ $2\sin x - 1 = 0$ را به دست آورید.

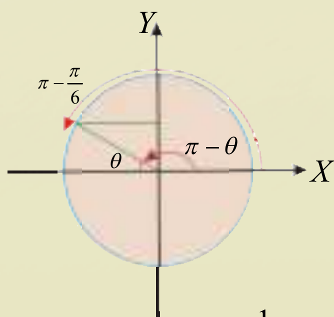


حل: نخست قیمت $\sin x$ را به دست می‌آوریم.

$$2\sin x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin x = 1 \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{1}{2}$$

مقصد از حل این معادله دریافت تمام قوس‌هایی است که sin آن $\frac{1}{2}$ است و کوچک‌ترین زاویهٔ آن عبارت از $\frac{\pi}{6}$ می‌باشد.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$



دایرهٔ مثلثاتی را در نظر گرفته زوایایی را دریافت می‌کنیم که sin آن‌ها $\frac{1}{2}$ شود.

$$x = \frac{\pi}{6}\,,\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\,,\ 4\pi + \frac{\pi}{6}\,,\ldots$$

در دایرهٔ مثلثاتی شکل دوم زوایایی را دریافت می‌کنیم که sin آن‌ها $\frac{1}{2}$ شود.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}\,,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\,,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\,,\ldots$$

بنابراین حل معادلهٔ $\sin x = \frac{1}{2}$ در دو ست جداگانه عبارت است از:

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ \wedge\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in Z\right\}$$

به صورت عمومی برای هر زاویهٔ θ می‌توان نوشت:

$$A = \{x / x = 2k\pi + \theta \ \wedge\ x = \pi + 2k\pi - \theta \quad k \in Z\}$$

ویا به صورت عمومی می‌توان نوشت: $x = n\pi + (-1)^n \theta \qquad n = 0,1,2,3,.....$

مثال 2: ست حل‌های معادلهٔ $2\sin x - 3 = 0$ را به دست آورید.

حل: $2\sin x = 3 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{2}$

حالا باید در فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ زاویه‌یی را دریافت کنیم که ساین آن $\frac{3}{2}$ شود. می‌دانیم $-1 \le \sin x \le 1$؛ پس زاویه‌یی وجود ندارد که sin آن $\frac{3}{2}$ شود؛ بنابراین معادله حل ندارد.

حالت دوم: معادلهٔ مثلثاتی: $a\cos x + b = 0$

برای دریافت جواب مناسب معادلهٔ بالا به مثال‌های زیر توجه کنید.

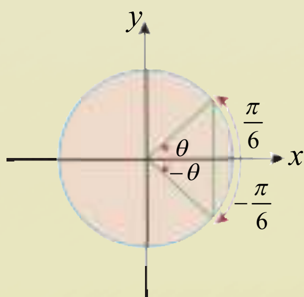
مثال 1: ست حلهٔ معادلهٔ $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ را به دست آورید.

حل: از معادلهٔ بالا $\cos x$ را به دست می‌آوریم.

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

در فاصلهٔ $[0, \pi]$ زاویهٔ x را دریافت و بعد رسم می‌کنیم تا $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ شود و کوچک‌ترین زاویهٔ حادهٔ آن $\frac{\pi}{6}$ است، $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

دایرهٔ مثلثاتی را درنظر می‌گیریم و در آن زاویه‌یی را دریافت می‌کنیم که $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ شود.



$$x = \frac{\pi}{6} \;,\; 2.\pi + \frac{\pi}{6} \;, 4\pi + \frac{\pi}{6} \quad ...$$

برای زاویه‌های منفی داریم:

$$x = -\frac{\pi}{6} \;,\; 2\pi - \frac{\pi}{6} \;,\; 4\pi - \frac{\pi}{6} \;...$$

ست حل‌های فوق را قرار ذیل به صورت عمومی می‌نویسیم: $x = 2n\pi \pm \theta \quad n = 0,1,2,3,...$

$$A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \;\wedge\; x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in Z\right\}$$

به صورت عمومی برای هر زاویهٔ θ می‌توان نوشت:

$$A=\{x/x=2k\pi+\theta \quad \wedge \quad x=2k\pi-\theta\ ,\ \ k\in ZI\ \}$$

مثال 2: معادلهٔ $2\cos x+\sqrt{2}=0$ در فاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ چند حل دارد.

حل:

$$2\cos x+\sqrt{2}=0$$

$$2\cos x=-\sqrt{2}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود؛ بنابرآن یک جذر معادله عبارت است از: $x=\frac{3\pi}{4}$

که ست حلهٔ آن مساوی است به: $A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in Z\right\}$

دیده می‌شود که معادله در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

حالت 3: معادلهٔ مثلثاتی: $a\tan x+b=0$

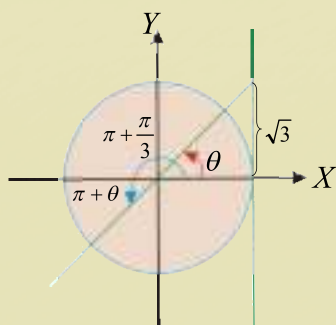
برای دریافت حل عمومی معادله بالا به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال 1: معادلهٔ $\tan x-\sqrt{3}=0$ را حل کنید.

حل: از معادلهٔ بالا، $\tan\ x$ را به دست می‌آوریم: $\tan x=\sqrt{3}$

حالا در فاصلهٔ $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ زاویه x را جستجو می‌کنیم که $\tan x=\sqrt{3}$ می‌شود و آن زاویـه $\frac{\pi}{3}$

یا 60° می‌باشد؛ بنابراین معادلهٔ بالا به صورت $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ در می‌آید.



$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ .\ .\ .\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ .\ .\ .\right\}$$

ست‌های فوق را به صورت عمومی می‌توان نوشت:

$$A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}\wedge\ (2k-1)\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in Z\right\}$$

و یا به صورت عمومی برای هر زاویهٔ θ می‌توان نوشت:

$$A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\ k\in Z\}$$

مثال 2: معادلهٔ زیر راحل کنید:

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{6}$$

ست حل معادله

$$A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ \ k\in Z\right\}$$

مثال 3: ست حلهٔ معادلهٔ $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ را در فاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ به دست آورید.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

به جای k اعداد صحیح را قرار می‌دهیم تا زوایایی که زاویه و نسبت‌شان در فاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ شامل باشند به دست بیاید.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0}\ x_1=\dfrac{7\pi}{12}\\[2mm]\xrightarrow{k=1}\ x_2=\pi+\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{19\pi}{12}\end{cases}$$

یا به صورت عموم ست حله‌های معادلهٔ فوق عبارت است از: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{7\pi}{12},\ k\in Z\right\}$

حالت 4: معادلهٔ مثلثاتی: $a\cot x+b=0$

برای دریافت حل عمومی معادلهٔ بالا به مثال‌های زیر توجه کنید.

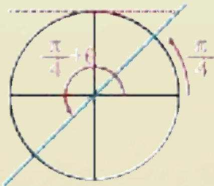
مثال 1: معادلهٔ $\cot x-1=0$ را حل نمایید.

حل:

$$\cot x-1=0$$

$$\cot x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

بنابراین حل معادلهٔ بالا را به صورت زیر نوشته می‌کنیم.



$$x=\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{4}\ ,...$$

$$x=\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{4}\ ,...$$

بنابراین ست حلهٔ معادله به صورت زیر می‌باشد.

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{4}\ ,...\right\}$$

$$A_2=\left\{\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{4}\ ,...\right\}$$

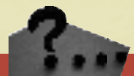
ست‌های فوق را به صورت عمومی قرار ذیل می‌توان نوشت:

$$A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\quad k\in Z\right\}$$

$$A=\{x/x=k\pi+\theta\ \ k\in Z\}$$

مثال 2: حل معادلهٔ $\cot 3x=\cot x$ را به دست آورید.

حل: $\cot 3x=\cot x \Rightarrow 3x=k\pi+x \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\quad k\in Z$



تمرین

ست حل‌های عمومی هر یک از معادلات زیر را دریافت نمایید.

$a)\ 3\cos x+5=0$ $\qquad$ $b)\ \tan x=\sqrt{3}$

معادلات مثلثاتی درجه دوم

در درس گذشته معادله‌های سادهٔ مثلثاتی را حل کردیم. حال معادله‌های درجه دوم مثلثاتی را مطالعه می‌نماییم. شکل عمومی معادلهٔ مثلثاتی عبارت از: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ است که a, b, c و d اعداد ثابت اند.

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$

مثال 1: معادلهٔ $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ را حل می‌کنیم.

حل: در معادلهٔ فوق $\sin x$ را به y تعویض می‌کنیم:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 19^\circ\, 30'$$

بدین ترتیب برای $\sin x = \frac{1}{2}$ کوچک‌ترین زاویه $\frac{\pi}{6}$ رادیان است. ست حل عمومی آن:

$$A = \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \qquad k \in Z$$

ویا می‌توان نوشت:

$$x = n\pi + (-1)^n \theta \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \qquad n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2 \ldots$$

به همین ترتیب برای $\sin x = \frac{1}{3}$ کوچک‌ترین زاویه از روی جدول عبارت از $19^\circ 30'$ است.

پس کوچک‌ترین زاویه‌یی که ساین آن $\frac{1}{3}$ باشد عبارت است از $19^\circ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120} rad$ می‌باشد.

$$A = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{cases} \qquad k \in Z$$

مثال 2: ست حلهٔ معادلهٔ $\cos 2x + \sin x = 0$ را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ است؛ بنابرآن می‌توانیم بنویسیم که:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

هرگاه در معادلهٔ بالا $y = \sin x$ وضع نماییم خواهیم داشت.

$$2y^2 - y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2y = -1 \;\Rightarrow\; y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y_2 = 1$$

با در نظرداشت تعویضی که برای $y = \sin x$ در بالا در نظر گرفته بودیم و برای قیمت‌های به دست آمده داریم.

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

بدین ترتیب برای $\sin x = -\frac{1}{2}$ زوایایی«خوردترین قوس» را دریافت می‌کنیم که $\sin x$ آن مساوی به $(-\frac{1}{2})$ شود و آن عبارت از $x = \frac{7\pi}{6}$ است.

$$A = \begin{Bmatrix} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{Bmatrix}$$

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{2},\ 4\pi + \frac{\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{2\pi + \frac{7\pi}{6},\ 4\pi + \frac{7\pi}{6}, 6\pi + \frac{7\pi}{6},\ \ldots\right\}$$

بنابراین ست حل معادلهٔ فوق عبارت است از:

$$A = \left\{x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\quad ,\quad x = 2n\pi + \frac{7\pi}{6}\ ,\ n = 0,1,2,3\ \ldots\right\}$$

مثال 3: $2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$

حل:

$$\sin x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0^\circ$$

$$2\sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\pi}{4}$$

ست حله‌های معادله عبارت است از:

$$A_1 = \{0^\circ\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi,\ 3\pi\ ,\ 4\pi,\ 5\pi\ ,\ \ldots\}$$

$$A_2 = \left\{\frac{\pi}{4},\ \pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi - \frac{\pi}{4}, \ldots\right\}$$



تمرین

ست حلۀ معادلات مثلثاتی زیر را دریافت کنید.

1 - $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2 - $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3 - $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

سیستم معادلات دو مجهولهٔ مثلثاتی

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$
$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

در درس‌های گذشته، سیستم معادلات الجبری را حل نمودیم، آیا سیستم معادلات مثلثاتی را هم حل کرده می‌توانیم؟

سیستم معادلات دو مجهولهٔ مثلثاتی را در شش نوع حل کرده می‌توانیم:

نوع اول: این نوع از هشت سیستم معادلات زیر تشکیل شده است:

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

طوری که a عدد ثابت و α قوس یا زاویهٔ معلوم بوده x و y قوس‌ها یا زوایای مجهول اند.

یکی ا ز این سیستم‌ها را حل می‌نماییم؛ مثال:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \; \ldots \; \text{I} \\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II}\end{cases}$$

قیمت معادلهٔ I را بر حسب فورمول‌های ضرب چنین می‌نویسیم،

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \; I \\ x + y = \alpha \ldots . \; II\end{cases}$$

حالا قیمت $x+y$ را از معادلهٔ II در معادلهٔ I به جای آن قرار می‌دهیم.

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \quad \ldots \; \text{I}$$

اطراف رابطهٔ I را تقسیم $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ می‌نماییم:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: طرف راست معادلهٔ فوق از مثبت یک کوچک‌تر و از منفی یک بزرگ‌تر باشد؛

یعنی:

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} \le 1$$

اطراف غیر تساوی فوق را مربع می‌سازیم : $\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1 \cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

مثال 1: سیستم معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: درسیستم فوق $a = 1$ و $\alpha = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. می‌بینیم که آیا شرط داده شده به حل سیستم صدق می‌کند یانه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$ قیمت a و α را در رابطهٔ فوق قرار می‌دهیم:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لهذا سیستم قابل‌حل است. در معادلهٔ اول طرف چپ را به کمک فورمول‌های تحویل(ضرب) تغییر شکل می‌دهیم.

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

چون $x + y = \frac{\pi}{2}$ است؛ پس $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4}$ می‌شود. لذا:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} \quad , x - y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........}\ I \\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........}\ II \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow\ 2x=\frac{2\pi}{2} \quad \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}$$

قیمت x را در معادلهٔ اول قرار داده قیمت y را به دست می‌آوریم:
$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$
$$y=0$$

نوع دوم: این نوع از شش سیستم معادلات زیر تشکیل شده است.

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \cos x\cdot\cos y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\cdot\sin y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \sin x\cdot\cos y=a \end{cases}$$

طوری‌که a عدد ثابت و α قوس یا زاویهٔ معلوم، x و y قوس یا زوایای مجهول می‌باشند.

شرط حل سیستم عبارت است از:
$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

مثال2: سیستم معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y=\pi\text{.......}I \\ \sin x\sin y=1\text{.....}II \end{cases}$$

حل: در سیستم فوق $a=1$ ، $\alpha=\pi$ می‌باشد. شرط امکان حل این معادلات عبارت است از:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

می‌دانیم:
$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos^2\frac{\pi}{2}=0$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

نظر به شرط حل سیستم می‌توان نوشت:
$$-\cos^2\frac{\pi}{2}\le a\le\sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0\le a\le 1$$

لذا سیستم قابل حل است. طرف چپ معادلهٔ II نظر به فورمول‌های تحویل این شکل را دارد:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

چون: $\sin x\sin y=1$ است.

بنابراین: $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2$

چون: $x+y=\pi$ است؛ بنابرآن: $\cos(x-y)-\cos\pi=2$

چون : $\cos\pi=-1$ است؛ پس: $\cos(x-y)-(-1)=2\Rightarrow\cos(x-y)+1=2$

$$\Rightarrow\cos(x-y)=2-1\Rightarrow\cos(x-y)=1$$

$$\cos(x-y)=\cos0^\circ$$

$$x-y=0\Rightarrow x=y$$

از معادلهٔ اول قیمت x را دریافت می‌کنیم: $x+y=\pi\Rightarrow x+x=\pi\Rightarrow 2x=\pi$

$$x=\frac{\pi}{2}\quad ,y=\frac{\pi}{2}$$

نوع سوم: این نوع از چهار سیستم معادلات زیر تشکیل شده است:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=a\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=a\end{cases}$$

α زاویهٔ معلوم، a عدد معلوم، x و y قوس یا زوایای مجهول اند.

مثال 3: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: دیده می‌شود که این سیستم به نوع سوم مربوط است؛ پس آن را به طرز زیر حل می‌کنیم: در معادلهٔ دوم، نظر به خواص تناسب اگر صورت ومخرج را جمع کرده در مخرج بنویسیم و ازصورت، مخرج را تفریق کرده در صورت قرار دهیم، باز هم یک تناسب به دست می‌آید.

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

قیمت‌های $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ و $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ را به جای آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

چون $x+y=\frac{\pi}{2}$ است؛ بنابر آن $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ می‌شود: $\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

چون $\cot\frac{\pi}{4}=1$ است؛ پس معادله شکل زیر را به خود می گیرد.

$$\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

نظر به فورمول‌های جمع و تفریق می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\tan 15^\circ$$

$$\tan\frac{x-y}{2}=\tan 15^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2}=15^\circ$$

$$x-y=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

قیمت x را در یکی از معادله‌ها وضع می کنیم؛ سپس قیمت y را به دست می‌آوریم.

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

نوع چهارم: این نوع از چهار سیستم معادلات زیر تشکیل شده است:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \cot x\pm\cot y=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \tan x\pm\tan y=a \end{cases}$$

طوری‌که α زاویه و a عدد معلوم است. x و y قوس‌ها یا زوایای مجهول اند.

شرط حل سیستم معادلات فوق عبارت است از: $a^2-4+4a\cot\alpha\ge 0$

مثال 4: سیستم معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3} \end{cases}$$

حل: معادلهٔ اول را این گونه می‌نویسیم:

$$\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$$

با استفاده از فورمول‌های طرح، قیمت طرف چپ معادله را می‌نویسیم:

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}$$

$$\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$$

اکنون به جای $\tan x-\tan y$ قیمت آن $(-2\sqrt{3})$ را در معادلهٔ بالا وضع می‌کنیم:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$$

اطراف را بطهٔ فوق را تقسیم $\sqrt{3}$ می‌نماییم.

$$\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}=1$$

$$=1+\tan x\cdot\tan y=-2\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=-3$$

$$\begin{cases} \tan x\cdot\tan y=-3..............I \\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}.......II \end{cases}$$

قیمت $\tan x$ را از معادله II این سیستم به دست آورده در معادلهٔ I قرار می‌دهیم.

$$\tan x=-2\sqrt{3}+\tan y$$

$$(-2\sqrt{3}+\tan y)\tan y=-3$$

$$\tan^2 y-2\sqrt{3}\tan y+3=0$$

$$(\tan y-\sqrt{3})^2=0\Rightarrow\tan y-\sqrt{3}=0\quad\Rightarrow\quad\tan y=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{\pi}{3}$$

با درنظرداشت قیمت y قیمت x را از معادلهٔ I به دست می‌آوریم.

$$\tan x\cdot\tan y=-3$$

$$\tan x\cdot\sqrt{3}=-3\Rightarrow\tan x=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

نوع پنجم: این نوع معادلات، از دو سیستم معادلات زیر تشکیل شده است:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

طوری‌که α زاویهٔ معلوم، a عدد معلوم، x و y زوایا یا قوس‌های مجهول اند.

شرط امکان حل سیستم فوق عبارت از $-1 \le \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \le 1$

مثال 5 : سیستم معادلات زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

دیده می‌شود که این سیستم، مربوط نوع پنجم است و آن را طور زیر حل می‌نماییم.

$$\tan x.\tan y = \frac{\sin x.\sin y}{\cos x.\cos y}$$

می‌دانیم:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y) \quad .... \ I$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) + \cos(x+y)\} \quad .... \ II$$

قیمت‌ها را در جایش قرار می‌دهیم:

$$\tan x.\tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

اکنون قیمت $x + y$ را از معادله I به جایش قرار می‌دهیم.

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

قیمت طرف چپ را از معادلهٔ II می‌نویسیم:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

برای این که کسر صفر شود باید صورتش صفر باشد، یعنی: $\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}=0$

می‌دانیم که $\cos 7\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؛ پس:

$$\cos(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x-y=\frac{5\pi}{6}$$

لذا چنین سیستم به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x-y=5\frac{\pi}{6} \ ...I \\ x+y=7\frac{\pi}{6} \ ...II \end{cases}$$

$$2x=\frac{5\pi+7\pi}{6}$$

$$2x=\frac{12\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{12\pi}{12} \ , \ x=\pi$$

قیمت x را در معادلهٔ I قرار داده قیمت y را به دست می‌آوریم:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \ \pi-y=5\frac{\pi}{6}$$

$$-y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6}$$

$$y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

نوع ششم: این نوع از دو سیستم معادلات زیر تشکیل شده است:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

شرط امکان حل عبارت است از : $-1 \le \dfrac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$

مثال 6 :

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} .....I \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = -3 .....II \end{cases}$$

نظر به خواص تناسب در معادلهٔ II اگر صورت ومخرج را جمع کرده در مخرج بنویسیم و از صورت مخرج را تفریق کرده در صورت قرار دهیم بازهم یک تناسب به دست می‌آید.

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{-3-1}{-3+1} = 2$$

قیمت‌های صورت و مخرج را به جای آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = 2$$

$$\Rightarrow \; 2\sin(x+y) = \sin(x-y)$$

چون $x - y = \dfrac{\pi}{2}$ است، لذا:

$$2\sin(x+y) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{6}$$

کوچک‌ترین قوس مثبتی که این معادله را صدق می‌کند عبارت است از: $\dfrac{\pi}{6}$ ، لذا:

$$x + y = \frac{\pi}{6}$$

$$x - y = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین سیستم معادلات را به شکل ذیل دریافتیم:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}.....\text{I} \\ x-y=\frac{\pi}{2}.....\text{II} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$$

$$2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

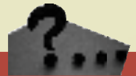
$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

قیمت x را در معادلهٔ I قرار داده قیمت y را به دست می‌آوریم.

$$x+y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$



تمرین

سیستم‌های معادلات مثلثاتی زیر را حل نمایید.

$a)\ \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

نکات مهم فصل

قانون ساین: در هر مثلث کیفی $\overset{\Delta}{ABC}$، بین اضلاع و زوایای مثلث مذکور رابطهٔ زیر وجود دارد:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

رابطهٔ فوق به نام قانون ساین یاد می‌شود.

قانون کوساین: در مثلث اختیاری $\overset{\Delta}{ABC}$ که طول اضلاع آن را با a، b و c نشان داده اند؛ بین اضلاع و زوایای مثلث روابط زیر وجود دارند.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

روابط فوق به نام قانون کوساین یاد می‌شود.

قانون تانجنت: در مثلث اختیاری $\overset{\Delta}{ABC}$ که طول اضلاع آن به a، b و c نمایش داده شده است، بین اضلاع و زوایای مثلث روابط زیر وجود دارند.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مطابقت‌های مثلثاتی: مساوات‌های مثلثاتی که برای تمام قیمت‌های زاویه، هر دو طرف مساوات باهم مساوی شوند، به نام مطابقت‌های مثلثاتی یاد می‌شود.

معادلهٔ مثلثاتی: مساوات مثلثاتی که برای بعضی از قیمت‌های زاویه، هر دو طرف مساوات مساوی باشند به نام معادلهٔ مثلثاتی یاد می‌شود.

سیستم معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی شش نوع می‌باشد.

نوع اول:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

نوع دوم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

نوع سوم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

نوع چهارم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan x = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

نوع پنجم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

نوع ششم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$



تمرین فصل دوم

سؤالات زیر را به دقت بخوانید، برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب درست را دریافت و دور آن حلقه نمایید.

1- $A = 20^\circ$ زاویه بین ضلع $b = 10cm$ و $c = 7cm$ می‌باشد. اندازهٔ ضلع a عبارت است از :

$a)\ 16.4cm$ $b)\ 16cm$ $c)\ 15.9cm$ $d)\ 4.176cm$

2– اگر $a = 8ft\ ,\ b = 5ft$ و $c = 10ft$ باشند؛ اندازهٔ زاویهٔ B عبارت است از:

$a)\ 28.5^\circ$ $b)\ 29.4^\circ$ $c)\ 29^\circ$ $d)\ 28^\circ$

3– اگر $A = 48^\circ\ ,\ B = 22^\circ$ و $a = 5ft$ باشد، اندازهٔ ضلع b عبارت است از:

$a)\ 8ft$ $b)\ 2.52ft$ $c)\ 9ft$ $d)\ -9.5ft$

4– ناحیهٔ قیمت‌های تابع $x = arc\sec y$ عبارت است از:

$a)\ IR^-$ $b)\ IR$ $c)\ IR - \{0\}$ $d)\ IR^+$

5– مطابقت مثلثاتی $\sec x(\sec x - \cos x)$ مساوی است به:

$a)\ \tan x$ $b)\ \dfrac{1}{\tan x}$ $c)\ \cot x$ $d)\ \tan^2 x$

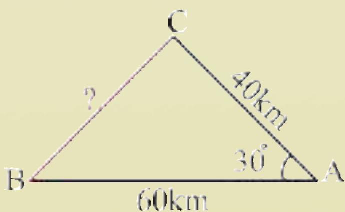
سؤالات زیر را حل نمایید:

1- هرگاه اندازهٔ $A = 30^\circ$ بین ضلع $c = 8ft$ و $b = 5ft$ باشد، اندازهٔ ضلع a و $\sin C$ را دریافت کنید.

2- اگر در یک مثلث اندازهٔ سه ضلع آن $a = 8cm\ ,\ b = 5cm$ و $c = 10cm$ داده شده باشد، اندازهٔ زاویهٔ A و B که مقابل ضلع b قرار دارد چند است ؟

3- در مثلث ABC اگر $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{c}{b}$ و اندازهٔ زاویه $A = 30^\circ$ داده شده باشد، اندازهٔ زاویهٔ B و C را دریافت کنید.

4- دو کشتی از یک نقطهٔ A به دو جهت مختلف طوری به حرکت افتاده‌اند که زاویه بین مسیر حرکت‌شان 30° است. اگر بعد از یک ساعت کشتی اول $40km$ و کشتی دوم $60km$ مسافت را طی کرده باشد؛ فاصله بین دو کشتی چند است؟



5- $\cot^2\beta$ را از جنس $\sin\beta$ و $\cos\beta$ افاده کنید.

6- مطابقت‌های مثلثاتی زیر را ثبوت کنید:

$a)\ \frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

$b)\ \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$

$d)\ \frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$

$e)\ \frac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\frac{A}{2})$

$f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$

7- افاده‌های مثلثاتی زیر را ساده نمایید:

$a)\ \frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

$b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$

$d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

8 - آیا مساوات $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ یک مطابقت مثلثاتی است یا یک معادلۀ مثلثاتی؟ با دلیل واضح سازید.

9- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید:

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$

$b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$

$d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

10- سیستم معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

فصل سوم

هندسهٔ فضایی

تصویری از اقلیدس بنیانگذار هندسهٔ دوبُعدی و سه‌بُعدی.



مفاهیم اساسی و اکسیوم ها

بررسی مفاهیم هندسهٔ اقلیدس را در دو بُعد، هندسهٔ مسطح و در سه بُعد، هندسهٔ فضایی می‌نامند.



فعالیت

- در مورد مفاهیم مانند اصطلاحات اولیه، دلیل، برهان وقضیه فکر کنید باهم جر و بحث نمایید بعد آن‌ها را بیان کنید.

بعد از انجام فعالیت فوق تعریف‌های زیر را می‌توان بیان کرد:

اصطلاحات اولیه Postulates: مفاهیمی که بدون تعریف قبول می‌شوند به نام اصطلاحات اولیه یاد می‌شوند. مانند نقطه، خط، مستوی و فضا.

دلیل و برهان Logical Reason: عمل ذهنی‌یی را برهان می‌نامند که از یک سلسله گزارش‌های قبلی درست، به گزارش بعدی می‌رسد؛ که درستی آن‌ها را بر اساس آنچه که پیشتر پذیرفته شده است، می‌توان قبول کرد.

قضیه Theorem: ادعای که درستی آن نیازمند برهان باشد، قضیه نامیده می‌شود.

نقطه: نقطه را به صورت مفهوم ذهنی می‌شناسیم و به قسم یک اصطلاح اولیه(تعریف ناشده) قبول می‌کنیم.

خط مستقیم: تار کش شده،کنار میز، تیغهٔ خط کش، مفهوم خط را ارائه می‌نماید. از دو نقطهٔ داده شده تنها وتنها یک خط مستقیم می‌گذرد و خط مستقیم را به صورت یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می‌نمایم.

اکسیوم‌های خط

اصل اول: دو نقطهٔ مشخص تنها وتنها یک خط مستقیم را مشخص می‌نماید.

اصل دوم: هر خط مستقیم حداقل دارای دو نقطهٔ مشخص است وحداقل سه نقط وجود دارد که بر یک خط مستقیم واقع نیستند.

اصل سوم: بین هر دو نقطهٔ یک خط مستقیم، می‌توان نقطهٔ مشخصی را به دست آورد.

مستوی: سطح آب ساکن، سطح تختهٔ صنف، مفهوم مستوی را ارائه می‌نماید. و مستوی را به صورت یک اصطلاح اولیهٔ تعریف نا شده قبول می‌کنیم.

اصل اول: در هر مستوی کم ازکم سه نقطه وجود دارد که به امتداد یک خط مستقیم واقع نباشد.

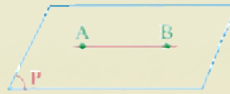
اصل دوم: از سه نقطهٔ که به استقامت یک مستقیم نباشد یک مستوی می‌گذرد.

اصل سوم: اگر دو نقطهٔ یک خط مستقیم در یک مستوی باشد، این خط شامل مستوی است.

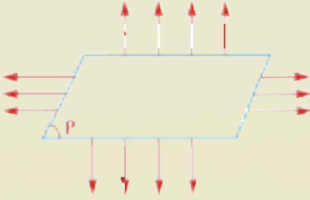
در هندسه مسطح ضرورت به رسم مستوی نیست؛ زیرا تمام اشکال به روی کاغذ ویا تختهٔ چوبی نشان داده می‌شود؛ ولی در هندسهٔ فضایی ضرورت به رسم مستوی است؛ زیرا تعداد مستوی‌ها یکی نه؛ بلکه زیاد می‌باشند. در هندسه فضایی به طور معمول مستوی را توسط متوازی الاضلاع، مستطیل و یا یک سطح هموار نشان می‌دهند که در یک کنج آن یک حرف را می‌نویسند.



مستوی نیست



مستوی محدود



مستوی نا محدود

مستوی‌های که در شکل نشان داده شده‌اند به همین وسعت نبوده؛ بلکه تا لایتناهی امتداد دارند و اینکه در یک شکل توسط مستطیل یا متوازی‌الاضلاع و غیره نشان داده می‌شود، آن مستوی متوازی‌الاضلاع نبوده بلکه نمایشی از سطح هموار است.

تمام علامه‌های که در هندسه مسطحه و به صورت عمومی در ریاضی استعمال می‌گردد در هندسه فضایی نیز استعمال می‌شود .

اکسیوم‌های که در هندسهٔ مسطح موجود اند. در هندسهٔ فضایی نیز از آن‌ها استفاده می‌شود.

در هندسهٔ فضایی اکسیوم‌های مخصوص فضا نیز وجود دارد، که در زیر بیان می‌شوند:

اکسیوم اول مستوی: خط مستقیمی که دو نقطهٔ مختلف شامل یک مستوی را وصل می‌کند، خط شامل همان مستوی است.

اکسیوم دوم مستوی: از سه نقطه‌یی که بالای یک مستقیم واقع نباشند، تنها یک مستوی می‌گذرد.

اکسیوم مستوی‌های متقاطع: اگر دو مستوی یک نقطهٔ مشترک داشته باشند در این صورت آن‌ها یک خط مستقیم مشترک دارند که این خط مستقیم را فصل مشترک دو مستوی می‌نامند.

فضا: فضا را نیز یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می‌نماییم.

اصل اول: فضا مجموعهٔ لایتناهی از نقاط است.

اصل دوم: کم از کم چهار نقطه از فضا دریک مستوی واقع نیست.



تمرین

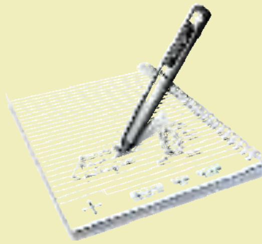
1 – واضح سازید که چرا میز سه پایه نسبت به میز چهار پایه استوارتر است.

2 – نقطهٔ، خط مستوی را چرا اصطلاح اولیه می‌نامند؟

3 – از سه نقطه چند مستوی عبور خواهد نمود که هر سه نقطه شامل آن باشد.

خط و مستوی در فضای سه‌بُعدی

دو قلم و دو کتاب و یک کتاب ویک قلم در فضأ دارای کدام حالات می‌باشند؟



فضایی سه‌بُعدی: فضایی که در آن زنده‌گی می کنیم فضای سه بُعدی است.

فضای سه بُعدی یکی از مفاهیم اولیهٔ تعریف ناشده می‌باشد.

فضا، مجموعه‌یی از نقاط است. خط و مستوی نیز به‌ترتیب دارای یک بُعد و دو بُعد می‌باشند و هریک جزئی از ست فضا می‌باشند.

اوضاع نسبی یک خط مستقیم و یک مستوی

یک خط مستقیم با یک مستوی دارای سه حالت زیر می‌باشند.

1 – هر گاه یک خط مستقیم با یک مستوی یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، این خط مستقیم و مستوی متقاطع می‌باشند.

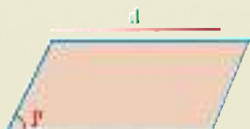
طور مثال: خط مستقیم Δ مستوی p را در نقطهٔ O قطع کرده است.



2 – هر گاه یک خط مستقیم با یک مستوی دو ویا زیادتر از دو نقطهٔ مشترک داشته باشند، این خط مستقیم منطبق با مستوی می‌باشد. به عبارت دیگر مستوی مذکور، این خط مستقیم را در بر دارد و یا که این خط مستقیم در مستوی شامل است؛ طور مثال: خط مستقیم d در مستوی p شامل است.



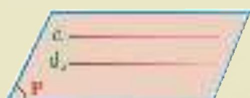
3 – اگر یک خط مستقیم با یک مستوی کدام نقطهٔ مشترک نداشته باشد این مستوی و خط مستقیم موازی یک دیگر می‌باشند؛ طور مثال: مستوی p با خط مستقیم d موازی است.



اوضاع نسبی دو خط مستقیم با یکدیگر

هرگاه دو خط مستقیم دریک مستوی قرار گیرند، خطوط مذکور هم مستوی نامیده شده و یکی از وضعیت‌های زیر را دارا می‌باشند:

1- دو خط مستقیم دریک مستوی موازی نامیده می‌شوند که هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند.



2- دو خط مستقیم در یک مستوی که دارای یک نقطهٔ مشترک باشند مستقیم متقاطع گفته می‌شوند .



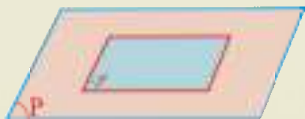
3- دو خط مستقیم که هم مستوی نبوده و هم دارای کدام نقطهٔ مشترک نباشند خطوط یساری ویا متنافر نامیده می‌شوند.



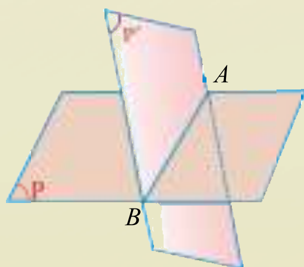
اوضاع نسبی دو مستوی

به صورت عمومی دو مستوی با همدیگر در فضا دارای سه وضعیت زیر می‌باشند:

1 – **منطبق:** هرگاه دو مستوی حد اقل سه نقطهٔ مشترک داشته باشندکه به امتداد یک خط مستقیم واقع نباشند، مستوی‌ها با هم منطبق گفته می‌شوند؛ طور مثال: دو مستوی P و P'.



2 – **متقاطع:** هرگاه دو مستوی یک خط مستقیم مشترک داشته باشند متقاطع گفته می‌شوند. این خط مستقیم مشترک AB را فصل مشترک دو مستوی P و P' می‌گویند.



3- **موازی:** هر گاه دو مستوی در فضا هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند با هم موازی اند؛ طور مثال دو مستوی P و P'.



فعالیت

- از یک نقطه در فضا، چند خط مستقیم می‌گذرد؟
- از یک نقطه چند مستوی می‌گذرد؟
- از دو نقطه چند خط مستقیم می‌گذرد؟
- از دو نقطه چند مستوی می‌گذرد؟
- از سه نقطه چند مستوی می‌گذرد که هر سه نقطه شامل آن باشند.



تمرین

1 – نقاط T و R بالای مستوی p واقع اند نظر، به کدام دلیل خط $\overline{RT}$ در مستوی p واقع است؟

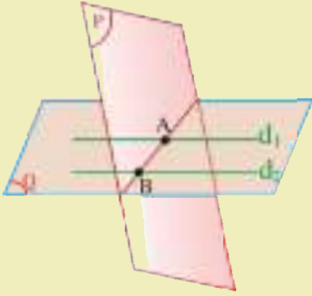
2 – اگر خط مستقیم Δ در مستوی p واقع نباشد خط مستقیم Δ مستوی p را در چند نقطه قطع خواهد نمود ؟

3 – اگر خط مستقیم $\overline{AB}$ و مستوی p دو نقطهٔ مشترک M و K داشته باشند، آیا خط مستقیم $\overline{AB}$ در مستوی p واقع است؟

4- نقاط B, A و C بر روی مستوی P قرار دارند و هم نقاط B, A و C بر روی مستوی P' قرار دارند، مستوی P و P' با هم چه ارتباط دارند؟

خطوط مستقیم موازی در فضا

آیا مستقیم‌ها در فضا موازی اند؟



تعریف: دو خط مستقیم که در یک مستوی واقع بوده و هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند، موازی نامیده می‌شوند.

اکسیوم موازات: از یک نقطهٔ خارج یک خط مستقیم، تنها و تنها یک خط مستقیم موازی به این خط مستقیم رسم کرده می‌توانیم و بس.



فعالیت

- نقطهٔ A و مستوی p وخط مستقیم d_1 که نقطهٔ A بالای آن نباشد در نظر بگیرید.
- از نقطهٔ A وخط مستقیم d_1 چند مستوی را عبور داده می‌توانیم؟ چرا؟

از فعالیت فوق متن قضیه و ثبوت آن را بیان می‌نماییم.

قضیه: از یک نقطهٔ خارج یک خط مستقیم تنها یک خط مستقیم موازی به آن رسم نموده می‌توانیم و بس.

ثبوت: از نقطهٔ A و خط مستقیم d_1 تنها یک مستوی p عبور می‌نماید. چرا؟

حالا از نقطهٔ A تنها خط مستقیم d_2 را موازی به خط مستقیم d_1 در مستوی p رسم نموده می‌توانیم.





فعالیت

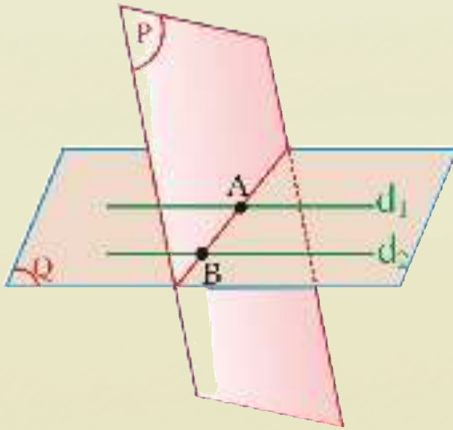
- آیا خطوط مستقیم d_1 و d_2 یک مستوی دیگر را تعیین کرده می‌توانید چرا؟
- اگر مستوی p خط مستقیم d_1 را در نقطهٔ A قطع کند؛ آیا مستوی P خط مستقیم d_2 را نیز قطع خواهد کرد؟

• آیا دو مستوی یکدیگر خود را به امتداد یک خط مستقیم قطع کرده می‌توانند، چرا ؟

بعد از انجام فعالیت‌های فوق متن قضیه و ثبوت آن را بیان می‌نماییم.

قضیه: هرگاه دو خط مستقیم موازی باشند و یک مستوی یکی از آن‌ها را قطع کند دیگرش را نیز قطع می‌نماید.

ثبوت:



مستقیم‌های d_1 و d_2 که در مستوی Q قرار دارند باهم موازی اند؛ اگر مستوی P خط مستقیم d_1 را در نقطهٔ A قطع نماید مستوی مذکور خط مستقیم d_2 را نیز در یک نقطه‌یی مانند B قطع خواهد نمود، نظر به تعریف، مستقیم‌های موازی d_1 و d_2 یک مستوی Q را تعیین می‌نماید. مستوی‌های p و Q یک نقطهٔ مشترک A دارند. اگر دو مستوی یکدیگر خود را دریک نقطهٔ قطع نمایند، آن هایکدیگر خود را به امتداد یک خط مستقیم قطع می‌نمایند؛ بنابرآن خط مستقیم d_2 را در نقطهٔ مانند B قطع می‌نماید؛ زیرا یک خط مستقیم در یک مستوی‌یی که یکی از دو خط موازی را قطع نماید دیگرش را نیز قطع می‌نماید.



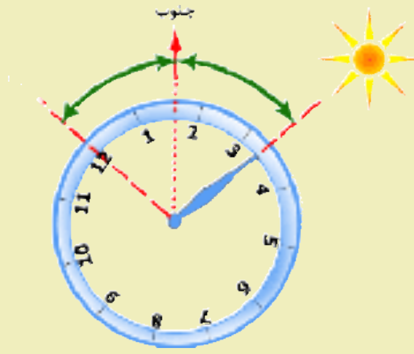
تمرین

1 – هرگاه دو خط مستقیم به یک خط مستقیم سومی موازی باشند، ثبوت کنید که خطوط مستقیم مذکور بین خود نیز موازی می‌باشند.

2 – اگر مستوی‌های E و F باهم موازی وخط L_1 در مستوی E وخط مستقیم L_2 در مستوی F واقع باشند آیا $L_2 // L_1$ است.

3 – اگر مستوی E و F متقاطع و مستوی p هر دوی آن‌ها را قطع نماید، آیا فصل مشترک E و F با فصل مشترک E و p و فصل مشترک F و p موازی است؟

زاویه بین دو خط مستقیم در فضا



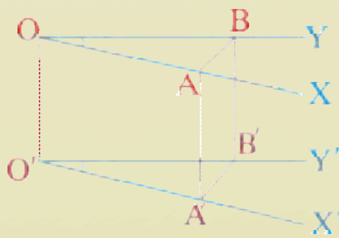
هرگاه جهت دوران زاویه، خلاف عقربهٔ ساعت باشد، زاویه مثبت و اگر هم جهت عقربهٔ ساعت باشد زاویه‌یی که تشکیل می‌شود منفی است.

فعالیت

- زوایای $X\hat{O}Y$ و $X'\hat{O'}Y'$ را قسمی در نظر بگیرید که اضلاع‌شان باهم موازی وهم جهت باشند.
- بالای ضلع OX و $O'X'$ دو قطعه خط مساوی $\overline{OA}$ و $\overline{O'A'}$، و بالای OY و $O'Y'$ دو قطعه خط مساوی OB و $\overline{O'B'}$ را جدا نمایید.
- $OA\ A'O'$ کدام شکل هندسی را دارد، استدلال کنید.
- مثلث‌های تشکیل شده OAB و $O'A'B'$ باهم چه رابطه دارند؟

از فعالیت فوق متن قضیه و ثبوت آن را می‌توان بیان کرد.

قضیه: دو زاویه در فضاء که دارای اضلاع موازی وهم جهت باشند باهم مساوی اند.



ثبوت: زوایای $X\hat{O}Y$ و $X'O'Y'$ را درنظر می گیریم طوری‌که $\overline{OX} // \overline{O'X'}$ و $OY // O'Y'$ بوده دارای عین جهت نیز می‌باشند. در شکل بالای OX و $O'X'$ دو قطعه خط مساوی OA و $O'A'$ موازی مساوی وهم جهت اند.

بنابر آن شکل $OA\ A'O'$ یک متوازی الاضلاع است؛ پس آن قطعه خط‌های $\overline{BB'}$ و $\overline{OO'}$ موازی، مساوی وهم جهت اند. $AB\ B'A'$ یک متوازی‌الاضلاع بوده و $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ می‌باشد.

لذا مثلث‌های $O'A'B'$ و OAB انطباق پذیر اند؛ زیرا $\overline{AB} = \overline{A'B'}$، $\overline{OA} = \overline{A'O'}$ و $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ است؛ بنابر آن $A\hat{O}B \cong A'\hat{O'}B'$

نتایج قضیه

I- اگر اضلاع دو زاویه به‌ترتیب موازی و هم جهت باشند زوایای مذکور باهم مساوی می‌باشند.

II- اگر یک یک ضلع دو زاویهٔ موازی و هم جهت و یک یک ضلع دیگر آن‌ها موازی و دارای جهات مخالف باشند؛ مجموع وسعت این دو زاویه 180° است، شاگردان نتایج را ثبوت کنند.

زاویه بین دو خط مستقیم متنافر

تعریف: زاویه بین دو خط مستقیم متنافر در فضا عبارت از زاویه‌یی است که توسط ترسیم دو خط مستقیم موازی به آن‌ها از یک نقطهٔ اختیاری دریک مستوی حاصل می گردد.



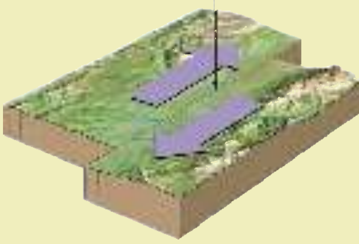
تمرین

1– اگر وسعت دو زاویه باهم مساوی باشند و یک ضلع یک زاویه موازی به یک ضلع زاویه دیگر باشد؛ آیا اضلاع دیگر آن‌ها باهم موازی است؟ چرا؟

2 – اگر اضلاع دو زاویه باهم موازی باشند ثابت نمایید که ناصف‌الزوایای آن‌ها باهم موازی و یا هم عمود اند.

3- زاویه بین دو مستقیم متنافر d_1 و d_2 را دریافت کنید.

مستقیم‌های موازی و مستوی‌های موازی درفضا



یک خط مستقیم را وقتی موازی به یک مستوی می‌نامند که هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند و مستوی‌ها در فضا وقتی باهم موازی اند که هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند.

فعالیت

- هر گاه خط مستقیم d شامل مستوی p و خط مستقیم Δ که خارج از مستوی p واقع بوده و موازی به خط مستقیم d باشد؛ آیا خط مستقیم Δ موازی به مستوی p شده می‌تواند؟
- دو مستوی متقاطع p و Q و یک خط مستقیم را خارج این مستوی‌ها موازی به مستوی p و Q درنظر بگیرید، آیا خط مستقیم Δ(فصل مشترک) موازی به مستقیم d شده می‌تواند ؟
- از یک نقطهٔ معین چند مستوی به دو خط مستقیم d_1 و d_2 رسم کرده می‌توانیم که موازی باهم نباشند.

بعد از انجام هر بند فعالیت متن، قضایا و ثبوت آن‌ها را به ترتیب بیان می‌کنیم.

قضیه: اگر یک خط مستقیم به یک خط مستقیم یک مستوی، موازی باشد. خط مستقیم مذکور به همین مستوی موازی می‌باشد.

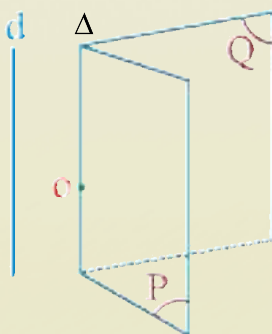


ثبوت: خط مستقیم d شامل مستوی p و خط مستقیم Δ که خارج مستوی p و موازی به خط مستقیم d_1 است داده شده است. ثابت می‌کنیم که خط مستقیم Δ موازی به مستوی p است.

اگر مستوی p خط مستقیم Δ را قطع کند خط مستقیم d را که موازی به خط مستقیم Δ است نیز قطع می‌کند.

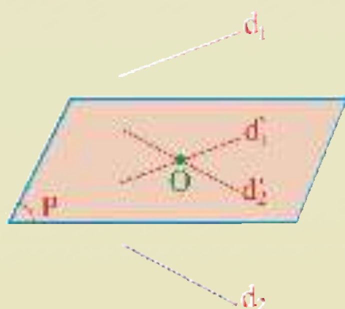
این عمل خلاف فرضیه است، زیرا مستوی p خط مستقیم d را دربر دارد؛ پس مستوی p خط مستقیم Δ را قطع کرده نمی‌تواند؛ لذا خط مستقیم Δ موازی به مستوی p است.

قضیه: هرگاه یک خط مستقیم به هر یکی از دو مستوی متقاطع موازی باشد خط مستقیم مذکور به فصل مشترک مستوی‌های ذکرشده موازی می‌باشد.



ثبوت: دو مستوی متقاطع p و Q را درنظر می‌گیریم که هر یک با خط مستقیم d موازی اند، در شکل مقابل اگر روی فصل مشترک Δ مستوی‌های p و Q یک نقطهٔ O را انتخاب نموده و از نقطهٔ مذکور یک خط موازی به خط مستقیم d رسم نماییم این خط موازی با خط Δ منطبق می‌باشد؛ زیرا خط Δ یگانه خطی است که شامل هردو مستوی p و Q بوده و موازی به خط d می‌باشد.

قضیه: از یک نقطهٔ معین (O) تنها یک مستوی موازی به دو خط مستقیم d_1 و d_2 که باهم موازی نباشند رسم نموده می‌توانیم نه بیشتر.



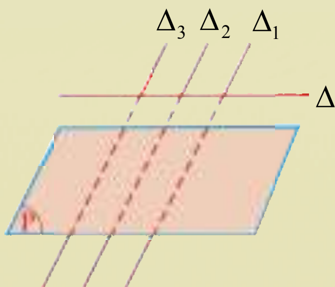
ثبوت: از نقطهٔ (O) موازی‌های $d_1^{'}$ و d'_2 را به‌ترتیب با مسقتیم‌های d_1 و d_2 رسم می‌نماییم، مستوی P که از نقطهٔ (O) گذشته و مستقیم $d_1^{'}$ و d'_2 را دربر داشته باشد با مستقیم‌های d_1 و d_2 موازی می‌باشد. چرا؟

اگر d_1 و d_2 باهم موازی باشند d'_1 و d'_2 باهم منطبق می‌باشند.



تمرین

1 – اگر خطوط مستقیم d_1 و d_2 باهم موازی باشند چند مستوی موازی را با آن‌ها رسم نموده می‌توانیم؟



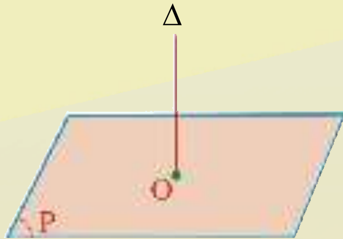
2 – هرگاه خطوط موازی Δ_1 , Δ_2 و Δ_3 توسط مستوی p وخط Δ که با مستوی p موازی است قطع گردند، ثبوت کنید که قطعات قطع شده متقابل باهم مساوی اند یا خیر.

خطوط مستقیم و مستوی‌های متعامد در فضاً



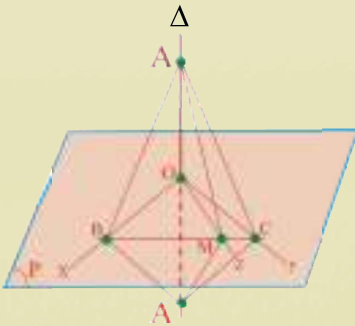
هر گاه خط مستقیم Δ بالای مستوی P در نقطهٔ (O) عمود باشد، آیا تمام مستقیم‌هایی که از نقطهٔ (O) بگذرد بالای مستقیم Δ عمود اند.

فعالیت



- شکل مقابل را درنظر گرفته دو خط مستقیم $\overline{OY}$, $\overline{OX}$ را بالای خط مستقیم Δ در نقطهٔ (O) عمود رسم نمایید.
- در مستوی p یک خط مستقیم کیفی $\overline{OZ}$ را در نظر بگیرید.
- بالای خط مستقیم Δ دو قطعه خط مستقیم متساوی‌الفاصله $\overline{OA}$ و $\overline{OA'}$ را جدا کنید.
- خط قاطع کیفی را قسمی رسم نمایید که خط مستقیم $\overline{OX}$ را درنقطهٔ B و خط مستقیم $\overline{OY}$ را درنقطهٔ C و خط مستقیم $\overline{OZ}$ را در نقطهٔ M قطع نماید.

قضیه: هرگاه یک خط مستقیم Δ بالای دو خط مستقیم که آن‌ها را دریک نقطهٔ (O) قطع کند و عمود باشد، بالای تمام مستقیم‌های که در مستوی این دو خط مستقیم متقاطع واقع اند و از نقطهٔ (O) بگذرد عمود می‌باشد؟



ثبوت: دو خط مستقیم $\overline{OX}$ و $\overline{OY}$ را درنظر می گیریم. این دو خط مستقیم بالای خط Δ که از نقطهٔ (O) عبور می‌نماید عمود بوده و مستوی P را تشکیل می‌دهند. در مستوی P یک خط مستقیم کیفی OZ را درنظر می‌گیریم. بالای خط مستقیم Δ دوقطعه خط مستقیم متساوی‌الفاصله $\overline{OA}$ و $\overline{OA'}$ را جدا نموده در مستوی P یک خط قاطع رسم می‌کنیم که $\overline{OX}$ را درنقطهٔ B و $\overline{OY}$ را در نقطهٔ C و خط مستقیم $\overline{OZ}$ را درنقطهٔ M قطع نماید.

$\overline{OX}$ و $\overline{OY}$ هر دو عمودهای وسطی $\overline{AA'}$ می‌باشند؛ بنابر آن:

$$\overline{BA}=\overline{BA'}$$

$$\overline{CA}=\overline{CA'}$$

مثلث‌های ABC و $A'BC$ انطباق پذیر اند. در اثنای انطباق پذیری نقاط B، C و M مستقر باقی میمانند. نقطهٔ A با A' و $\overline{MA}$ با $\overline{MA'}$ منطبق می‌شوند؛ بنابر آن:

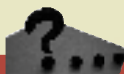
$$\overline{MA}=\overline{MA'}$$

لذا مثلث MAA' متساوی‌الساقین بوده. میانه $\overline{MO}$ در عین زمان عمود وسطی $\overline{AA'}$ است؛ پس خط مستقیم Δ بالای خط مستقیم $\overline{OZ}$ عمود است.



فعالیت

- اگر نقاط B و C متساوی‌الفاصله از نقاط P و Q باشند، هر نقطهٔ خط مستقیم $\overline{BC}$ متساوی‌الفاصله از نقاط P و Q می‌باشند. حالا یک نقطهٔ کیفی x را به روی خط مستقیم BC انتخاب نموده و ثابت نمایید که نقطهٔ x متساوی‌الفاصله از نقاط P و Q است.



تمرین

1 – اگر خطوط d_1 و d_2 باهم موازی باشند چند مستوی موازی را می‌توانید با آن‌ها رسم نمایید؟

2 – اگر خط مستقیم L به روی مستوی P عمود باشد آیا تمام مستوی‌های که خط L در آن واقع است بر روی مستوی P عمود می‌باشند؟

مستوی‌های موازی درفضا

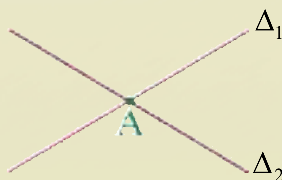
آیـا در شـکل مقابـل طبقـه‌هـای سـاختمان بـا هـم موازی اند؟



فعالیت

- اگر خطوط مستقیم Δ_1 و Δ_2 که درنقطهٔ A متقاطع اند درنظر گرفته شود.

آیا از این دو خط مستقیم و نقطهٔ A یک مستوی را عبور داده می توانیم؟



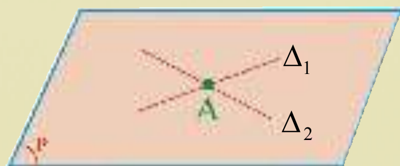
اگر مستوی را عبـور داده مـی‌تـوانیم خـارج آن یـک نقطـهٔ B و مستقیم‌های d_1 و d_2 را مـوازی بـه Δ_1 و Δ_2 در نقطهٔ B رسم نمایید.

- مستوی که از تقاطع خطوط Δ_1 و Δ_2 و نقطهٔ تقاطع A تشکیل شـده باشـد بـا مـستوی کـه از تقاطع خطوط d_1 و d_2 و نقطهٔ B تشکیل شده باشند چه ارتباط دارند ؟

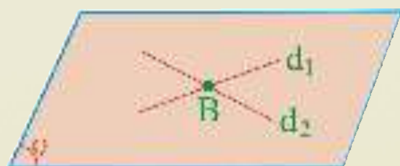
بعد از انجام فعالیت فوق متن قضیه را می‌توان بیان کرد.

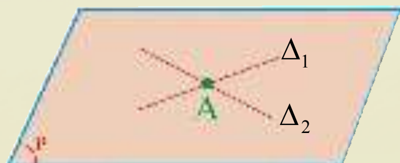
قضیه: اگر دو خط مستقیم متقاطع یک مستوی بـا دو خـط مـستقیم متقـاطع مـستوی دیگـر مـوازی باشند، مستوی‌های مذکور باهم موازی اند.

ثبوت: مستقیم‌های Δ_1 و Δ_2 درنقطهٔ A متقـاطع انـد و یـک مـستوی p را تـشکیل مـی‌دهنـد. از نقطهٔ B (کـه خارج مستوی p است) خطوط موازی d_1 و d_2 را که با خطوط مستقیم Δ_1 و Δ_2 رسم شـده، مـستقیم‌هـای d_1 و d_2 نیـز یـک مـستوی Q را تـشکیل مـی‌دهنـد. ثابـت



می‌کنیم که مستوی‌های p و Q باهم موازی اند، چون خط مستقیم d_1 موازی به خط مستقیم Δ_1 است؛ پس خط d_1 به مستوی p موازی می‌باشد؛ هم چنان خط مستقیم d_2 موازی به خط مستقیم Δ_2 است؛ پس خط مستقیم d_2 نیز در مستوی Q شامل می‌باشد. حالا اگر مستوی‌های p و Q یکدیگر را قطع کنند، فصل مشترک‌شان با مستقیم‌های d_1 و d_2 همزمان موازی می‌شوند، چرا؟





و این ناممکن است؛ زیرا مستقیم‌های d_1 و d_2 متقاطع اند؛ بنابراین مستوی‌های p و Q یکدیگر را قطع کرده نمی‌توانند. درنتیجه مستوی‌های p و Q باهم موازی اند.



تمرین

هرگاه مستوی‌های E و F باهم موازی باشند و خط مستقیم L_1 در مستوی E و خط مستقیم L_2 در مستوی F واقع باشند؛ آیا خطوط L_1 و L_2 باهم موازی اند؟

نکات مهم فصل

1- مفاهیم اساسی واکسیوم‌های هندسهٔ فضایی

اصطلاحات اولیه Postulates: مفاهیمی که بدون تعریف قبول می‌شوند به نام اصطلاحات اولیه یاد می‌شوند. مانند نقطهٔ، خط، مستوی وفضا.

دلیل و برهان Logical Reason: برهان عمل ذهنی‌یی است که از یک سلسله گزارش‌های قبلی درست به گزارش بعدی می‌رسد و درستی آن‌ها را براساس آنچه که پیشتر پذیرفته شده است می‌توان قبول کرد.

قضیه Theorem: ادعای که درستی آن نیازمند به برهان باشد قضیه نامیده می‌شود.

نقطه: نقطه را به صورت مفهوم ذهنی می‌شناسیم و به قسم یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می‌کنیم.

خط مستقیم: تارکش شده،کنار میز، تیغهٔ خط‌کش، مفهوم خط را ارائه می‌نماید. بدون درنظر داشت علامه از دو نقطهٔ داده شده تنها وتنها یک خط مستقیم می‌گذرد وخط مستقیم را به صورت یک اصطلاح اولیه(تعریف ناشده) قبول می‌نماییم.

اکسیوم‌های خط

اصل اول: دو نقطهٔ مشخص تنها وتنها یک خط مستقیم را مشخص می‌نماید.

اصل دوم: هر خط مستقیم حد اقل دارای دو نقطهٔ مشخص است وحد اقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط مستقیم واقع نیستند.

اصل سوم: بین هر دو نقطهٔ یک خط مستقیم، می‌توان نقطهٔ مشخصی را به دست آورد.

مستوی: سطح آب ساکن و سطح تختهٔ صنف مفهوم مستوی را ارا ئه می‌نماید. و مستوی را به صورت یک اصطلاح اولیهٔ تعریف ناشده قبول می‌کنیم.

* **اکسیوم اول مستوی:** خط مستقیمی که دو نقطهٔ مختلف یک مستوی را وصل می‌کند شامل همان مستوی است.

* **اکسیوم دوم مستوی:** از سهٔ نقطه‌یی که بالای یک خط مستقیم واقع نباشند تنها یک مستوی می‌گذرد.

* **اکسیوم مستوی متقاطع:** اگر دو مستوی یک نقطهٔ مشترک داشته باشند در این صورت آن‌ها یک خط مستقیم مشترک دارند. این خط مستقیم را فصل مشترک دو مستوی می‌نامند.

فضا: فضا را نیز یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می‌نماییم.

اصل اول: فضا مجموعهٔ لایتناهی از نقاط است.

اصل دوم: کم از کم چهار نقطهٔ از فضا وجود دارند که دریک مستوی واقع نیستند.

٭ خط و مستوی در فضای سه‌بُعدی

فضای سه‌بُعدی: فضایی که در آن زنده گی می کنیم فضای سه بُعدی است.

او ضاع نسبی دو خط مستقیم با یکدیگر

٭ موازی

٭ منطبق

٭ متقاطع

٭ متنافر

اوضاع نسبی یک خط مستقیم و یک مستوی

٭ متقاطع

٭ منطبق

٭ موازی

اوضاع نسبی دو مستوی

٭ منطبق

٭ متقاطع

٭ موازی

خطوط مستقیم موازی در فضا

دو خط مستقیم که در یک مستوی واقع بوده و نقطهٔ مشترک نداشته باشند، موازی نامیده می‌شوند.

زاویه بین دو خط مستقیم در فضا

دو زوایه در فضا که دارای اضلاع موازی و هم جهت باشند باهم مساوی اند.

مستقیم‌های موازی و مستوی در فضا

یک مستقیم را وقتی موازی به یک مستوی می‌نامند که هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند.

مستقیم‌ها و مستوی‌های متعامد درفضا

هرگاه خط مستقیم Δ بالای مستوی P درنقطهٔ O عمود باشند، آیا تمام خطوط مستقیمی که از نقطهٔ O بگذرند بالای خط مستقیم Δ عمود اند؟

مستوی‌های موازی در فضا

آیا دو مستوی که هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشند مستوی‌های موازی نامیده می‌شوند؟



تمرین فصل سوم

برای هر سؤال چهار جواب داده شده جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1 – مستوی P و نقاط A و B مفروض استند، اگر فاصلهٔ نقاط A و B از مستوی P مساوی باشد آنگاه مستوی P همواره:

a – با خط AB موازی است
b– از وسط خط AB می گذرد
c – ناصف عمودی خط AB است
d– موازی به قطعه خط AB است یا از وسط خط AB می گذرد

2 – اگر خط Δ بالای مستوی p عمود باشد آن گاه:

a– خط Δ به تمام خطوط مستوی p عمود است

b– خط Δ فقط به دو خط مستوی p عمود است

c– خط Δ با خط از مستوی p موازی است

d– خط Δ فقط با یکی از خطوط مستوی p موازی است

3 – از کدام یک از اجزای زیر به صورت دقیق یک مستوی عبور نمی کند.

a– از سه نقطهٔ واقع به یک خط مستقیم
b– دو خط متقاطع
c– یک خط و یک نقطهٔ خارج از آن
d– چهار نقطهٔ متمایز

4- کدام یک از جواب‌های زیر همیشه درست نیست ؟

a– اگر خط مستقیم Δ با مستوی p موازی باشد

b– اگر دو خط Δ و Δ' با خط d موازی باشند، آن گاه Δ و Δ' موازی استند.

c– اگر دو خط Δ و Δ' موازی باشند و مستوی خط Δ را قطع کند خط Δ' را نیز قطع خواهد کرد.

d– اگر دو مستوی متمایز دریک نقطهٔ مشترک باشند. آن گاه دریک خط مستقیم مشترک خواهند بود.

5 – خط Δ مستوی p را قطع می کند؛ ولی بر مستوی p عمود نیست، این خط به چند خط از مستوی p عمود است.

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ -2$ $d)$ بی شمار

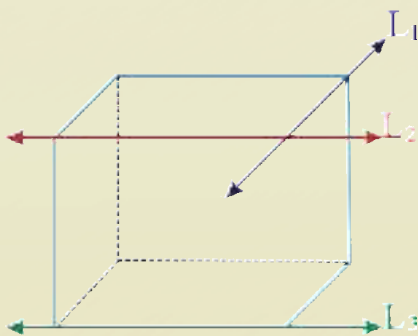
سؤالات زیر را حل کنید.

1 – اگر مستوی‌های E و F باهم موازی و خط مستقیم L_1 در مستوی E و خط مستقیم L_2 در مستوی F واقع باشند آیا $L_1 // L_2$ اند؟

2 – اگر دو خط مستقیم با یک مستوی موازی باشند؛ آیا خطوط مذکور باهم عمود شده می‌توانند؟

3 – در شکل مقابل موقعیت خطوط L_1 , L_2 و L_3 را نظر به یکدیگر توضیح نمایید.

آیا کدام جوره از خطوط باهم متقاطع، کدام جوره از خطوط آن‌ها باهم موازی و کدام‌ها متنافر می‌باشد؟

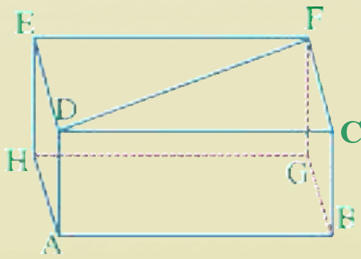


4 – اگر مستوی‌های P_1 و P_2 بر روی مستوی p عمود باشند؛ آیا مستوی‌های P_1 و P_2 باهم موازی اند؟

5 – در شکل مقابل هر چهار ضلعی، یک مستطیل است؟

a- دو مستوی را نام ببرید که بالای خط AD عمود باشند و بگویید چرا عمود اند؟

b- سه قطعه خط را نام بگیرید که بالای مستوی ABCD عمود باشند.

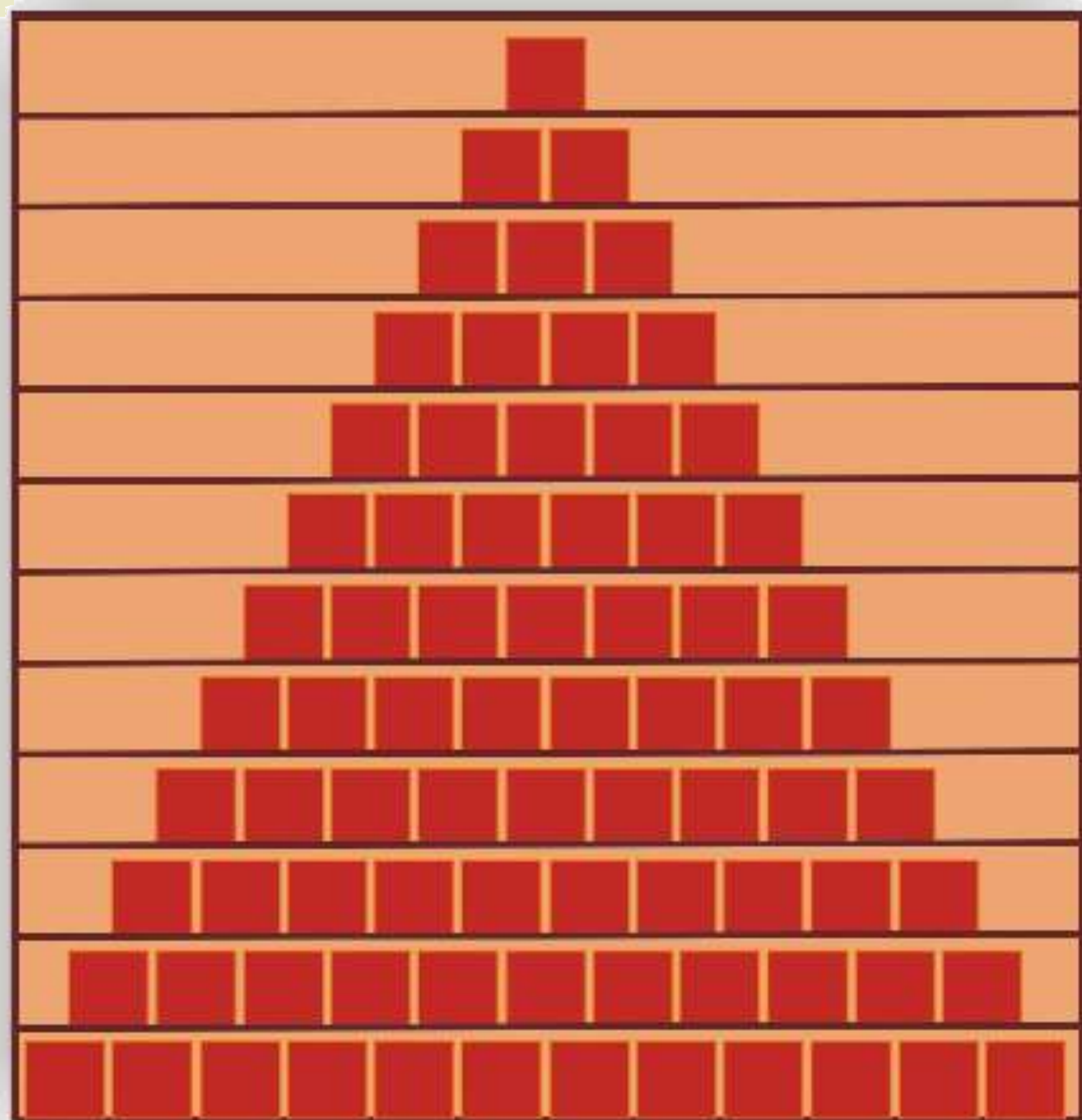


c- آیا زاویۀ $E\hat{D}F$ قایمه است؟

d- آیا زاویۀ DFC قایمه است؟

فصل چهارم

ترادف‌ها و سلسله‌ها



ترادف‌ها

Sequences



آیا در شکل مقابل کدام ترتیب را می‌بینید؟

ترتیبی را وجود دارد توضیح کنید.

تعریف

ترادف عبارت از تابع است که ناحیهٔ تعریف آن اعداد طبیعی و ناحیهٔ قیمت‌های آن اعداد حقیقی باشد و یا به عبارهٔ دیگر $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ به نام ترادف اعداد یاد می‌شوند. نوشتن نامرتب و غیر منظم اعداد ترادف نیستند. هر یک از اعداد فوق حد ترادف مذکور بوده طوری که a_1 حداول و a_n حد n - ام ترادف فوق می‌باشد.

ترادف اعداد جفت	$2, 4, 6, 8, \ \ldots \ , 2n$
ترادف اعداد طاق	$1, 3, 5, 7, \ \ldots \ , 2n-1$
ترادف اعداد مضرب پنج	$5, 10, 15, 20, \ \ldots \ , 5n$

طور معمول یک ترادف به وسیلهٔ حدا ختیاری $n-$ام تعریف و معین شده می‌تواند؛ طور مثال:

$a_n = 2n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$

$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$

$c_n = 5n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$

یادداشت: هر گاه تعداد حدود یک ترادف معین باشد آن را به نام ترادف معین، هرگاه حدود ترادف معین نباشد آن را ترادف غیرمعین گویند.

فعالیت

- شکل انکشافی ترادف $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ را بنویسید.
- شکل انکشافی $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ را بنویسید.

ترادفی که قیمت عددی حدود آن به تدریج افزایش می‌یابد ترادف متزاید گفته می‌شود؛ مانند ترادف اعداد جفت، طاق، مضرب‌های پنج وغیره.

ترادفی که مقدار حدود آن طور تدریجی کم شود به نام ترادف متناقص یاد می گردد؛ مانند ترادف معکوس اعداد مضرب‌های پنج وغیره. $\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15}, \ \dots \ ,\frac{1}{5n}$

مثال 1: ترادف‌های $a_n = n^2$ و $b_n = \frac{3}{n}$ متزاید اند یا متناقص.

حل: دیده می‌شود که حدودترادف a_n افزایش می‌یابد؛ بنابرآن متزاید است و حدودترادف b_n کم می‌شود؛ بنا برآن متناقص می‌باشد.

$$a_n = n^2 = 1,4,9,16,25,36, \ \dots$$

$$b_n = \frac{3}{n} = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5}, \ \dots$$

مثال 2 : ترادف ...,8 ,4 ,2 ,1 را در نظر گرفته حد n –ام آن را بنویسید.

حل: حد n –ام آن عبارت است از : $a_n = 2^{n-1}$

مثال 3: اگرحد عمومی یک ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ داده شده باشد، 5 حد اول آن را دریابید.

حل: برای دریافت 5 حد اول باید قیمت‌های $n = 1,2,3,4,5$ در حد عمومی وضع شود 5 حدترادف اول به دست می‌آید.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n=1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n=2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n=3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n=4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n=5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$



تمرین

1- در ترادف‌های انکشافی زیرحد n–ام آن‌را بنویسید.

$$1, 3 , 5 , 7 , \dots$$

$$1 ,\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ \dots$$

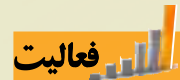
2- اگر یک ترادف به شکل $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ داده شده باشد 6 حد اول پی در پی آن را بنویسید.

ترادف حسابی

Arithmetic Sequence



اگر در یک ترادف تفاوت بین دوحد متعاقب آن یک عدد ثابت باشد ترادف به کدام نام یاد می‌شود؟



فعالیت

- ترادف اعداد مقابل را در نظر بگیرید: $5,8,11,14,17,20$
- فرق بین حد اول و حد ما بعد آن چند است؟
- ترادف اعداد فوق از چند حد تشکیل شده است؟
- ترادف اعداد فوق را از چپ به راست بنویسید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد:

تعریف: هرگاه در یک ترادف فرق بین دو حد متعاقب آن همیشه یک عدد ثابت باشد آن را ترادف حسابی می‌نامند.

این عدد ثابت را به نام فرق مشترک (Common difference) نامیده و به حرف d نشان می‌دهند. در صورتی که d یک عدد مثبت($d>0$) باشد، ترادف را متزاید و اگر فرق مشترک عدد منفی($d<0$) باشد ترادف را متناقص می‌خوانند؛ مانند مثال‌های زیر:

$$2,5,8,11,14,17, \ \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} d &= 5-2=3 \\ d &= 8-5=3 \\ d &= 11-8=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d=3>0$$

چون $d>0$ است؛ پس ترادف حسابی متزاید است.

ترادف دوم را درنظر می گیریم.

$$4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \ \dots$$

$$\left.\begin{aligned} d &= 0-4=-4 \\ d &= -4-0=-4 \\ d &= -8-(-4)=-4 \\ d &= -12-(-8)=-4 \\ d &= -16-(-12)=-4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

چون $d<0$ است؛ پس ترادف حسابی متناقص است.

مثال1: ترادفی را تشکیل دهید که حد اول آن $\frac{3}{2}$ و فرق مشترک آن عدد 2 باشد.

حل: چون حد اول آن $a_1=\frac{3}{2}$ و فرق مشترک آن $d=2$ است؛ بنابرآن به صورت عمومی می‌توان نوشت.

$$a_1, a_2, a_3, \ \dots$$

$$a_2-a_1=d \Rightarrow a_2=a_1+d$$

$$a_3-a_2=d \Rightarrow a_3=a_2+d$$

$$a_4-a_3=d \Rightarrow a_4=a_3+d=a_2+d+d=a_1+d+d+d=a_1+3d$$

حالا قیمت‌ها را در ترادف $a_1, a_2, a_3, \ \dots, a_n$ وضع می کنیم:

$$a_1, (a_1+d), \ (a_1+2d), \ (a_1+3d), \ \dots$$

$$\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}+2\right), \ \left(\frac{3}{2}+2+2\right), \ \left(\frac{3}{2}+2+2+2\right), \ \dots$$

$$\frac{3}{2}, \ \frac{7}{2}, \ \frac{11}{2}, \ \frac{15}{2}, \ \dots$$

مثال2: کدام یک از ترادف‌های زیر یک ترادف حسابی می‌باشد.

$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ \dots\dots\dots$ (a

$1, 2, 4, 8, 16 \ \dots\dots\dots$ (b

حل جزء a: نظر به تعریف ترادف حسابی، فرق مشترک حدود را به دست می‌آوریم.

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

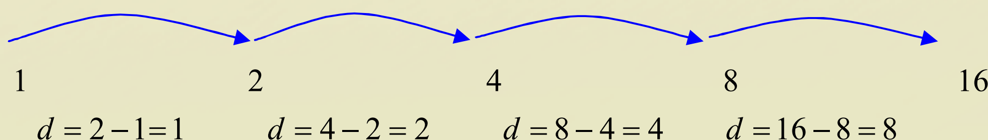
$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2} \Rightarrow d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$d=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow d=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}$$

$$d=4-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}$$

دیده می‌شود که فرق مشترک تمام حدودترادف حسابی مساوی به عدد ثابت $\frac{1}{2}$ است؛ پس ترادف حسابی می‌باشد.

حل جزء b:



$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

$$d=2-1=1 \quad d=4-2=2 \quad d=8-4=4 \quad d=16-8=8$$

دیده می‌شود که فرق بین تمام حدود ترادف حسابی مساوی به یک عدد ثابت نیست؛ پس ترادف حسابی نمی‌باشد.

دریافت حد n–ام در یک ترادف حسابی

هرگاه در یک ترادف حسابی حد اول آن a و فرق مشترک آن d باشد، برای دریافت حد n–ام از ثبوت تحلیلی زیر استفاده می‌نماییم.

ترادف مقابل را درنظر می گیریم.

$$5,7,9,11,\ \ldots$$

$$d=7-5=2$$

$$5,(5+2),(5+4),(5+6),\ \ldots$$

$$5,(5+2),(5+2+2),(5+2+2+2),\ \ldots$$

$$5,(5+2),(5+2\times2),(5+2\times3),\ \ldots$$

$$a_1,a_2,a_3,\ \ldots$$

به صورت عمومی می‌توان نوشت؛ که:

$$a_1,(a_1+d),(a_1+2d),(a_1+3d),\ \ldots$$

با در نظرداشت مثال فوق می‌توان به صورت عمومی نوشت:

حد اول	حد دوم	حد سوم	حد چهارم		حد n-ام
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	....	$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4	....	a_n

در نتیجه بین $n,\ d, a_1$ و a_n رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ برقرار است.

مثال 1: حد 30 ام ترادف حسابی $-2,5,12,\ \ldots$ را دریافت کنید.

حل:

$$a_1 = -2 \qquad a_n = a + (n-1)d$$
$$d = 5-(-2) = 7 \qquad a_{30} = -2 + (30-1)7$$
$$n = 30 \qquad a_{30} = -2 + 29 \cdot 7$$
$$a_{30} = ? \qquad a_{30} = -2 + 203 \ \Rightarrow\ a_{30} = 201$$

مثال 2: تعداد حدود ترادف حسابی زیر را دریافت کنید.

$35,\ 40,\ 45,\ \ldots,2000$

حل: می‌دانیم که:

$$a_1 = 35,\quad d = 40-35 = 5,\quad a_n = 2000,\quad n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$2000 = 35 + (n-1)5$$
$$2000 = 35 + 5n - 5$$
$$2000 = 30 + 5n$$
$$2000 - 30 = 5n$$
$$1970 = 5n$$
$$n = \frac{1970}{5}$$
$$n = 394$$

مثال 3: هرگاه حد اول یک ترادف حسابی $a_1 = 3$ و $a_{10} = 10$ با شد فرق مشترک؛ یعنی قیمت d را دریافت کنید:

حل:

$$a_1 = 3,\quad d = ?,\quad a_n = 30,\quad n = 10$$

$$\left.\begin{aligned} & a_n = a_1 + (n-1)d \\ & 30 = 3 + (10-1)d \\ & 30 = 3 + 9d \\ & 30 - 3 = 9d \\ & 27 = 9d \\ & d = 3 \end{aligned}\right\}$$



فعالیت

- دریک ترادف حسابی $d = 4, a_1 = -11$ اند حدود a_2 و a_3 را دریابید.

حد وسطی ترادف حسابی

هرگاه سه حد مسلسل a_{n-1}، a_n، a_{n+1} را داشته باشیم، درحالی‌که $n = 2,3,4,...$ باشد.

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + nd]$$

$$= [a_1 + nd - 2d] + [a_1 + nd] = [a_1 + nd - 2d + a_1 + nd]$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [2a_1 + 2nd - 2d] = 2[a_1 + (n-1)d] = 2a_n$$

$$\Rightarrow\ 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \quad \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

مثال 1: اوسط حسابی بین اعداد 7 و 23 عبارت است از:

حل: $$a_n = \frac{7+23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

مثال 2: عدد x را طوری تعیین کنید که سه حد ترادف حسابی را تشکیل دهد. ترادف آن را بنویسید.

$$\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\ \underbrace{2x-4}_{a_n},\ \underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$$

حل: قیمت‌ها را در فورمول وسط حسابی قرار می‌دهیم.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2x - 4 = \frac{2x+1+3x+3}{2} = \frac{5x+4}{2}$$

$$2x - 4 = \frac{5x+4}{2} \Rightarrow 4x - 8 = 5x + 4 \Rightarrow 4x - 5x = 4 + 8$$

$$\Rightarrow -x = 12\,,\ x = -12$$

$$2(-12)+1\,,\ 2(-12)-4\ ,\ 3(-12)+3$$

$$-24+1\ ,\ -24-4\ ,\ -36+3$$

ترادف آن عبارت است از $-23\,,\ -28\ ,\ -33\,, -38 - 43 ...$

یادداشت: اگر دریک ترادف حسابی حدود n – ام و m – ام آن معلوم باشد.

یعنی : $a_n = a + (n-1)d\ ...\ \text{I}\quad ,\quad a_m = a + (m-1)d\ ...\ \text{II}$

رابطهٔ II را از رابطهٔ I تفریق نموده درنتیجه می‌توان فرق مشترک آن را به دست آورد.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

ثبوت آن کارخانه گی شاگردان است.

d فرق مشترک، a_n حد n – ام ترادف و a_m حد m – ام ترادف است.

مثال 3: حد پنجم یک ترادف عدد 27 و حد نهم آن 47 می‌باشد. فرق مشترک و حد اول آن را تعیین کنید. و 9 حد ترادف را بنویسید.

□ , □ , □ , □ , 27 , □ , □ , □ , 47

حل: فرق مشترک را دریافت می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 47 \\ n = 9 \\ m = 5 \\ a_m = 27 \\ d = ? \\ a = ? \end{array}\right\} d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{47-27}{9-5} = \frac{20}{4} = 5$$

حد اول آنرا دریافت می کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$27 = a_1 + (5-1)5$$

$$27 = a_1 + 20 \Rightarrow a_1 = 7$$

ترادف به دست آمده عبارت است از: $7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47$

ترادف هارمونیک: یک ترادف $\{a_n\}$ را زمانی ترادف هارمونیک گویند که معکوس آن؛ یعنی $b_n = \frac{1}{a_n}$ یک ترادف حسابی باشد.

مثال 1: ترادف $2,4,6,8,10, \ldots$ یک ترادف حسابی گفته می‌شود؛ زیرا $d = 2$ است، معکوس حدود این ترادف $\ldots, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ را یک ترادف هارمونیک گویند.

مثال 2: معکوس اعداد طبیعی یک ترادف هارمونیک است. حد n –ام آنرا بنویسید.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ \ldots, \frac{1}{n}$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}$$

مثال 3: هرگاه در یک ترادف هارمونیکی $a_1 = \frac{1}{4}$ و $d = -3$ باشد، ترادف هارمونیک آنرا به دست آورید.

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4} - 3), (\frac{1}{4} - 3 - 3), (\frac{1}{4} - 3 - 3 - 3), (\frac{1}{4} - 3 - 3 - 3 - 3), \ \ldots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{-11}{4}, \frac{-23}{4}, \frac{-35}{4}, \frac{-47}{4}, \ \ldots$$



فعالیت

- آیا معکوس اعداد طبیعی طاق، یک ترادف هارمونیکی است؟ حد n - ام آنرا بنویسید.

اوسط هارمونیکی: هرگاه حدود مسلسل a_{n-1} , a_n , a_{n+1} از یک ترادف حسابی را در نظر بگیریم درحالی که $n = 2, 3, 4, \ldots$ باشد.

با درنظرداشت اینکه $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ و $\frac{1}{a_{n+1}}$ حدودیک ترادف هارمونیک است می‌توان نوشت که:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}\cdot\frac{1}{2}$$

رابطهٔ اخیر را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a_n\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2(a_{n+1})(a_{n-1})}$$

$$2(a_{n+1})(a_{n-1})=a_n(a_{n-1}+a_{n+1}) \Rightarrow a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: اوسط هارمونیکی اعداد 2 و 8 را دریافت کنید.

حل: با استفاده از فورمول $a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ دریافت می کنیم:

$$a_n=\frac{2(2\cdot 8)}{2+8}=\frac{2\cdot 16}{10}=\frac{32}{10}=3.2$$



تمرین

1- حد 35 ام ترادف مقابل را دریافت کنید. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ تشکیل ترادف حسابی را می‌دهند؟ درصورت صحت بودن سؤال، فرق مشترک آن را به‌دست آورید.

3- اوسط حسابی بین $۲\sqrt{۲}$, $۱۶\sqrt{۲}$ را دریافت کنید.

4- اگر $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_{10}=\frac{84}{2}$ باشد قیمت d را دریافت کنید.

5- کدام یک از ترادف‌های زیر ترادف حسابی نیست؟

$$2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2},\ \frac{11}{4}\ ,\ ...$$

$$3\ ,\ 6\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ ..$$

ترادف هندسی

Geometric Sequences



اگر در یـک تختـۀ شـطرنج در خانـۀ اول یکدانـه گندم و در خانۀ دوم دو دانه گندم گذاشته شـود، پـس درخانـۀ اخیر تختـۀ شـطرنج (یـک تختـه 64 خانه دارد) چند دانه گندم می‌باشد؟

فعالیت

- ترادف اعداد مقابل را درنظر بگیرید. $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$
- در بین حدود ترادف فوق چه رابطه موجود است؟
- نسبت بین دوحد متعاقب ترادف را دریافت نموده باهم مقایسه کنید.

از فعالیت فوق می‌توان نتیجه را طور زیر بیان کرد:

نتیجه: ترادفی که نسبت بین دوحد متعاقب آن یک عدد ثابت q باشد، به نام تـرادف هندسـی یـاد می‌شود؛ یعنی:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = a_n \cdot q, \ n = 1,2,3,\ldots$$

در اینجا q نسبت مشترک و a_1 حد اول تـرادف نامیـده مـی‌شـود. تـرادف هندسـی زمـانی مـشخص می‌گردد که حد اول و نسبت مشترک آن معین باشد.

مثال 1: ترادف هندسی $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ را درنظر گرفته نـسبت مـشترک آن را دریافـت کنید.

حل: هر حد را تقسیم حد ماقبل آن می‌نماییم؛ یعنی $q = \frac{a_2}{a_1}$

$$96 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6$$

$$q = \frac{48}{96} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

دیده می‌شود که $q = \frac{1}{2}$ یک عدد ثابت است.

فعالیت

در یک ترادف هندسی $a_1 = 2$ و $q = 3$ است حدود a_2 و a_3 و a_4 آنرا دریافت کنید.

برای $q > 1$ ترادف متزاید است.

برای $q < 1$ ترادف متناقص است.

برای $q = 1$ ترادف، یک ترادف ثابت است.

مثال 2: ترادف هندسی $\ldots\quad 2700\ ,\ 900\ ,\ 300,\ 100,$ را در نظر گرفته حد اول و نسبت مشترک آنرا دریافت کنید و نیز بگویید که ترادف هندسی فوق متزاید است یا متناقص.

$$a_1 = 2700$$

$$q = \frac{900}{2700} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

چون $q < 1$ است پس ترادف متناقص است.

دریافت حد n – ام ترادف هندسی

اگر a حد اول، q نسبت مشترک و n تعداد حدود در یک ترادف هندسی معلوم باشد، برای دریافت فورمول حد اخیر از ثبوت تحلیلی زیر استفاده می‌نماییم.

ترادف هندسی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ را درنظر می گیریم:

حداول	حددوم	حدسوم	حدچهارم	حدپنجم		حدn–ام
a_1	aq	aq^2	aq^3	aq^4	....	aq^{n-1}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....	a_n

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

عبارت الجبری $a_n = a\cdot q^{n-1}$ راحد n - ام یا حدعمومی ترادف هندسی می گویند.

مثال 1: حد ششم ترادف هندسی زیر را دریافت نمایید.

حل: $5\ ,\ -10,\ 20, -40 \ldots$

$$\left.\begin{aligned} & a=5 \\ & q=\frac{-10}{5}=-2 \\ & n=6 \\ & a_6=? \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & a_n=a_1 q^{n-1} \\ & a_6=5\cdot(-2)^{6-1} \\ & a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5\cdot(-32) \\ & a_6=-160 \end{aligned}$$

مثال 2: حد دوازدهم ترادف هندسی $\ldots, 2\ ,\ 4\ ,\ 8$ را دریابید.

حل:

$$\left.\begin{aligned} & n=12 \\ & a=8 \\ & q=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & a_n=aq^{n-1} \\ & a_{12}=8(\frac{1}{2})^{12-1}=8(\frac{1}{2})^{11}=8\frac{1}{2^{11}} \\ & a_{12}=\frac{8}{2^{11}}=\frac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256} \end{aligned}$$

دریافت وسط هندسی

$$\frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$
$$M=\sqrt{ab}$$

با درنظرداشت فورمول فوق گفته می‌توانیم که اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، M به نام وسط هندسی (Geometric Mean) اعداد a و b یاد می‌شوند.

مثال 3: وسط هندسی اعداد 12 , 3 را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم که $M=\sqrt{ab}$ است ؛ پس:

$a=3$

$b=12 \qquad M=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6 \quad \Rightarrow \quad M=6$

مثال 4: در ترادف هندسی $2, \square, \square, \square, 32$ حدود مجهول را دریافت کنید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ a_5=32 \\ q=? \\ n=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\frac{32}{2}=16 \Rightarrow q^4=16 \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_2=a_1\cdot q \Rightarrow a_2=2\cdot 2=4 \ , \ a_3=a_1\cdot q^2 \Rightarrow a_3=2\cdot 2^2=8 \ , \ a_4=a_1\cdot q^3$$

$$\Rightarrow a_4=2\cdot 2^3=16$$

پس ترادف عبارت است از: 32 , 16 , 8 , 4 , 2



فعالیت

هرگاه در ترادف هندسی a_n حد n–ام، n تعداد حدود و q نسبت مشترک باشند، فورمول عمومی برای q را دریافت کنید.

مثال 5: x را چنان تعیین کنید که حدود زیر تشکیل ترادف هندسی را بدهند.

$$\underbrace{x-1}_{a} \ , \ \underbrace{x+3}_{M} \ , \ \underbrace{x+1}_{b}$$

$$M^2=a\cdot b \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \ x=-\frac{10}{6} \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{5}{3}$$



تمرین

1- 5 حد اول ترادف هندسی را بنویسید که حد اول آن 5 و حد اخیر آن $\frac{5}{16}$ باشد.

2- کدام‌یک از ترادف‌های زیر ترادف هندسی اند؟

$a)\ \frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\ldots \qquad b)\ -4,-2,0,2,4,\ \ldots$

3- حد دوازدهم ترادف هندسی $5,\frac{5}{2},\frac{5}{4},\ldots$ را دریافت کنید.

4- وسط هندسی $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ را دریافت کنید.

5- سه حد مجهول ترادف هندسی $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ را دریافت کنید.

مجموعۀ قسمی ترادف‌ها



- تعداد قوطی‌های قطار دهم چند است؟
- تعداد تمام قوطی‌های الماری را دریابید.

فعالیت

- ترادف $2,4,6,8, \ldots$ را در نظر بگیرید و

حاصل جمع حد دوم و سوم آن را دریافت کنید.

حاصل جمع ده حد اول پی در پی آن‌را بنویسید. سپس؛ از فعالیت فوق نتیجۀ زیر را می‌توان بیان کرد:

$4+6=10$ و $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20=110$

اما برای دریافت حاصل جمع n حد اول مشکل است که تمام n حدودآن را با هم جمع نماییم؛ چون که ترادف دارای حدود بی‌نهایت است؛ به‌طور مثال اگر حاصل جمع حدود زیاد 100 حد، 10000 حد وغیره در نظر باشد؛ پس تشکیل حاصل جمع آن خسته کن می‌باشد.

به صورت عمومی حاصل جمع n حداول ترادف $a_1\ , a_2\ , a_3\ , \ldots\ a_n$ را قرار زیر می‌نویسیم.

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

جهت اختصار وسهولت محاسبات مطابق تعریف از سمبول $\sum$ استفاده می‌نماییم.

حرف‌های بالا و پایین $\sum$ که به نام اندکس یاد می‌شوند نشان می‌دهند که تمام اعداد طبیعی از 1 تا به n قیمت می‌گیرند. برای اندکس یک مجموعه، هر حرف استعمال شده می‌تواند؛ ولی استعمال n,k,j و i زیاد معمول است.

طور مثال:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k=\sum_{i=1}^{n} 2i=\sum_{j=1}^{n} 2j=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdot\cdot\cdot+2n$$

مثال 1: $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}$ را به شکل انکشاف یافته بنویسید.

حل:

$$\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$$

مثال 2:حاصل جمع زیر را به شکل $\sum$ بنویسید.

a) $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)$

b) $1+4+9+\ \dots\ +n^2$

حل:

$$a)\ 1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$b)\ 1+4+9+\ \dots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

مثال 3: مجموع‌های زیر را به شکل انکشاف یافته بنویسید.

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=?$$

حل:

$$4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\ \dots\ +n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\ \dots\ +n(n+2)$$

مثال 4: حاصل جمع $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ را دریافت کنید.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}$$
$$=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}$$
$$=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

تابه حال تنها حاصل جمع n حد یک ترادف را مطالعه کردیم؛ هرگاه خواسته باشیم که حاصل جمع تمام حدود ترادف (a_n) را دریافت کنیم در این صورت می‌نویسیم که:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

در این حالت i ست تمام اعداد طبیعی می‌باشد.

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ را به نام یک سلسلهٔ بی نهایت و یا به نام یک سلسلهٔ (series) یاد می‌کنند.

اعداد $a_1 + a_2 + a_3, \ldots$ به نام حدود سلسله یاد می‌شوند و a_n به نام حد n – ام سلسله یاد می‌شود.

با وجودی‌که ما نمی‌توانیم تعداد بی‌نهایت اعداد را جمع کنیم؛ ولی در ریاضیات توسط استعمال بعضی قواعد می‌توانیم به سلسلهٔ یک مجموعه نسبت دهیم؛ اما در این‌جا می‌خواهیم مجموعهٔ n حد آن را دریافت کنیم.

مجموعهٔ nحداول یک سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ را به نام حاصل جمع قسمی n – ام سلسلهٔ مذکور یاد می‌کنند. اگر آن‌را به S_n نشان دهیم، می‌توان نوشت که:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

مثال5: s_6 و s_8 سلسله $1 + 2 + 3 + \ldots. + n + \ldots$ را محاسبه کنید.

حل:

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دو سلسله باشند و c یک عدد ثابت باشد خواص زیر برای مجموعه‌های قسمی آن درست اند:

$$\sum_{k=1}^{n} c+c+...+c=nc=$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$$



تمرین

1- مجموعه‌های زیر را محاسبه کنید.

a - $\sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ b - $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ c - $\sum_{k=1}^{3} (4k^2-3k)$

2- مجموعه‌های زیر را به شکل $\sum$ بنویسید.

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{19}{20}$ b) $1+4+9+...+n^2$

c) $1+3+5+7+...+(2n-1)$

3- مجموعه‌های قسمی زیر را به دست آورید.

a) $\sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ b) $\sum_{i=1}^{n} 3i-2$ c) $\sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

مجموع قسمی n حد اول ترادف حسابی

هرگاه $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ یک ترادف حسابی باشد.

آیا $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ مجموعهٔ قسمی یک سلسلهٔ حسابی شده می‌تواند؟

تعریف

هرگاه در بین حدود ترادف حسابی علامت جمع موجود باشد آن را سلسله حسابی گویند و یا به عبارت دیگر حاصل جمع یک ترادف حسابی را سلسلهٔ حسابی گویند.

در یک ترادف حسابی که حد اولی آن a، فرق مشترک آن d و حد اخیر آن a_n باشد برای این حدود فورمول حاصل جمع را چنین به دست می‌آوریم:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad I$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots.. + (a - 2d) + (a + d) + a \quad \ldots\ldots\ldots. \quad II$$

روابط I و II را طرف به طرف جمع می‌نماییم.

$$2S = \underbrace{(a + a_n) + (a + a_n) + (a + a_n) + (a + a_n) + \ldots + (a + a_n) + (a + a_n) + a + a_n}_{n(a+a_n)}$$

$$2S = n(a + a_n) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(a + a_n) \ldots\ldots\ldots I$$

فورمول فوق حاصل جمع سلسلهٔ حسابی را نشان می‌دهد که حد اول، حد اخیر و تعداد حدود آن معلوم باشد.

مثال 1: حاصل جمع سلسلهٔ حسابی را معلوم نمایید در صورتی که $a = 4$, $a_n = 25$ و تعداد حدود آن 8 باشند.

حل: با استفاده از فورمول:

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ a_n=25 \\ n=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \\ S=\frac{8}{4}(4+25) \Rightarrow S=4(29)=116 \end{array}$$

هرگاه در یک سلسلهٔ حسابی حد اول، تعداد جمله‌ها و فرق مشترک آن داده شده باشد حاصل جمع آن از رابطه زیر به دست می‌آید؛ هرگاه در رابطهٔ 1 به جای a_n قیمت آن را وضع نماییم داریم که:

$$S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)......1$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$S=\frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d] \Rightarrow S=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] \;.......... III$$

فورمول III عبارت است از مجموع قسمی n حد اول ترادف حسابی می‌باشد.

مثال 2: حاصل جمع 201 حد سلسله زیر را به دست آرید.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=7 \\ d=4 \\ n=201 \\ S_{n=?} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7+11+15+... \\ S=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] \end{array}$$

$$S=\frac{201}{2}[2\cdot 7+(201-1)4]$$

$$S=\frac{201}{2}(14+200\cdot 4) \Rightarrow S=\frac{201}{2}(14+800)=\frac{201}{2}\cdot 814=201\cdot 407=81807$$

$$S=81807$$

فعالیت

- سلسلهٔ اعداد طبیعی را در نظر گرفته حد اول، فرق مشترک و حد n- ام آنرا نوشته مجموعهٔ مسلسل اعداد طبیعی را بنویسید.

مثال 3: سلسلهٔ اعداد جفت $2+4+6+8+.....$ را در نظر گرفته مجموع n حد آنرا به دست آورید.

حل:

$$2+4+6+8+...$$
$$d=4-2=2$$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ S_n=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \\ \Rightarrow S_n=n(n+1) \end{array}$$

مثال 4: حاصل جمع 200 حد اعداد جفت سلسلهٔ $2+4+...+$ را دریابید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S=200(200+1) \\ S_{200}=200(200+1) \\ S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

فعالیت

- مجموع قسمی سلسلهٔ حسابی اعداد مسلسل طاق را به دست آورید.



تمرین

1- حد n-ام و حاصل جمع ده حد ترادف‌های حسابی زیر را دریافت کنید.

$i)\ \ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

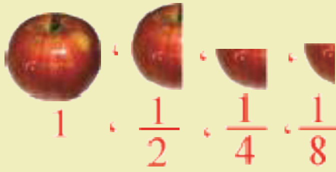
$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

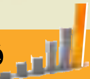
2- اگر یک ترادف به شکل ...,2,5,8,11 داده شده باشد، قیمت مجموع‌های زیر را حساب کنید.

$a)\ S_8$ $\qquad$ $b)\ S_{10}$

حاصل جمع n حد ترادف هندسی

اگر یک سیب را نیم و نیم آنرا دوباره نیم کنیم و به همین ترتیب ادامه دهیم یک ترادف هندسی به وجود می‌آید. چند حد ترادف را با هم جمع می‌نماییم تا مجموع آن مساوی به یک سیب گردد؟





فعالیت

- در یک ترادف هندسی که حد اول آن a، نسبت بین دو حد متعاقب آن مساوی به q داده شده باشد، حد دوم ترادف چند است؟
- حد دوم ترادف را با q ضرب نموده، نتایج را با حد سوم مقایسه کنید.
- برای حاصل جمع n حد ترادف فورمولی را دریافت نمایید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر را می‌توان بیان کرد.

نتیجه: در یک ترادف هندسی هر حد مابعد در اثر ضرب کردن یک عدد ثابت به عدد ماقبل آن به دست می‌آید. این مطلب برای تمام حدود قابل قبول است. به این ترتیب در یک ترادف هندسی $\{S_n\}$ حاصل جمع n حد آن است $S_n = a_1 + a_2 + ...a_n$ عبارت است از:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \qquad q \neq 1$$

$$1 - q \neq 0$$

ثبوت رابطهٔ فوق را به دست می‌آوریم:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} \qquad .... \ I$$

اطراف مساوات I را ضرب q می‌نماییم و رابطهٔ به دست آمده را رابطهٔ II می‌نامیم:

$$S_n \cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^n \qquad .... \ II$$

از رابطهٔ I رابطهٔ II را تفریق می‌کنیم:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - aq^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad , \qquad q \neq 1$$

صورت ومخرج رابطهٔ فوق را ضرب (1-) می‌نماییم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

فورمول فوق حاصل جمع n حد ترادف هندسی را برای ما می‌دهد.

مثال1: در یک ترادف هندسی حد اول $a_1 = 2$ و نسبت مشترک آن $q = \frac{1}{2}$ است.5 حداول متوالی و مجموع 10 حدرا دریافت کنید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_5 = 2(\frac{1}{2})^{5-1} = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

مثال2: مجموع چند حد از ترادف هندسی زیر 80 می‌شود؟

$2 , 6 , 18, \ ...$

حل: با استفاده از فورمول حاصل جمع می‌توانیم مجموع را در یافت کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ = 80 = (3)^n - 1 \quad \Rightarrow \quad 80 + 1 = (3)^n \\ = 81 = 3^n \quad \Rightarrow \quad (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$



تمرین

1- در ترادف هندسی ...,$\frac{2}{9}$,$\frac{2}{3}$, 2 حاصل جمع 10حد آن را دریافت کنید.

2- در ترادف هندسی 384, ... ,3,6,12 تعداد حدودو مجموع آنرا دریافت کنید.

3- در ترادف هندسی ... ,4,12,36 حاصل جمع چند حدآن مساوی به 484 می‌شود؟ به دست آورید؟

سلسله‌های هندسی لایتناهی

اگر به حدود ترادف دقیق شویم به آسانی دیده می شود که حد به حد، ترادف کوچک می‌شود.

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

اگر در یک سلسلهٔ هندسی $(|q| \geq 1)$ باشد و تعداد حدود آن معلوم نباشند در این صورت حد اخیر سلسلهٔ مذکور به بی‌نهایت خواهد رسید. این نوع سلسله را به نام سلسله متباعد یا Divergent series می‌نامند.

در صورتی که $|q| < 1$ باشد آن سلسله را به نام سلسله متقارب یا Convergent می‌نامند.

دریافت فورمول حاصل جمع سلسلهٔ متباعد و متقارب

می‌دانیم که: $S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$

اگر سلسلهٔ متباعد؛ یعنی $|q| \geq 1$ باشد و تعداد حدود بی نهایت باشند؛ یعنی $n \to \infty$، پس:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

به طور مثال: حال جمع سلسلهٔ $1+3+9+27+\dots$ را دریابید.

حل: چون $r = 3 > 1 \Rightarrow S_\infty = \infty$

برای دریافت سلسله متقارب هندسی داریم که:

هر قدر که n بزرگ شود $q^n (n \to \infty)$ کوچک می گردد $(q^n \to 0)$ در این‌صورت رابطهٔ $S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ چنین خواهد شد:

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنی اگر سلسلهٔ متقارب ($|q|<1$) باشد و تعداد جمله‌ها بی نهایت شود، حاصل جمع سلسلهٔ نامبرده عبارت است از: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

مثال 1: حاصل جمع سلسلهٔ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ را محاسبه کنید.

حل: در این سلسله $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ می‌باشد، قسمی که $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ است؛ پس سلسله متقارب است.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot 2=2$$

مثال 2: اگر حد اول یک سلسلهٔ هندسی $a_1=27$ و نسبت مشترک در آن $q=\frac{1}{3}$ باشد، مجموع حدود سلسله را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم که $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ است؛ پس سلسله متقارب است.

$$a+a_1+a_2+...+=\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

مثال 3: کسر اعشاری متوالی $0.6\overline{23}$ را به یک سلسلهٔ بی‌نهایت هندسی تبدیل نموده مجموعهٔ سلسله را محاسبه کنید.

حل:

$$0.6\overline{23}=0.6232323...=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

داخل قوس حاصل جمع حدود ترادف هندسی است که حد اول آن 1 و نسبت هندسی حدود آن $\frac{1}{100}$ است؛ بنابرآن سلسله متقارب می‌باشد.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{\frac{100-1}{100}}=\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}$$

$$0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

مثال4: کسر اعشاری متوالی $0.\overline{3}$ را با استفاده از سلسلهٔ هندسی به کسر عام تبدیل کنید.

حل: می‌دانیم که:

$$0.\overline{3}=0.3333=0.3+0.03+0.003+0.0003+\ldots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots$$

دیده می‌شود که در سلسلهٔ فوق $a=0.3$ و $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ است؛ پس سلسله متقارب است.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}\Rightarrow\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$



تمرین

1- مجموع ترادف‌های هندسی زیر را دریابید.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots \qquad (i$$

$$5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots \qquad (ii$$

2- کسر اعشاری زیر را به کسر عام تبدیل کنید.

$a)\ 0.\overline{5}$ $\qquad$ $b)\ 0.\overline{24}$

تعریف ترادف: ترادف عبارت از تابع است که ناحیهٔ تعریف آن اعداد طبیعی و ناحیهٔ قیمت‌های آن اعداد حقیقی باشد و یا به عبارت دیگر $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ به نام ترادف اعداد طبیعی یاد می‌شوند. a_1 حد اولی ترادف و a_n حد n ـام ترادف می‌باشد.

ترادف حسابی: هرگاه در یک ترادف حاصل تفریق بین دو عدد متعاقب آن همیشه یک عدد ثابت باشد آن‌را ترادف حسابی می‌نامند.

حد وسطی ترادف حسابی: هرگاه سه حد مسلسل a_{n+1}, a_n, a_{n-1} داشته باشیم؛ پس:

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ یک حد وسطی ترادف حسابی را ارائه می‌کند.

ترادف هندسی: ترادفی که نسبت هر حد بر حد قبلی آن یک عدد ثابت q باشد به نام ترادف هندسی یاد می‌شود.

فورمول حد n ام در یک ترادف هندسی: $a_n = aq^{n-1}$

حدوسطی ترادف هندسی: هرگاه حدود مسلسل $a_{n+1} + a_n + a_{n-1}$ باشد، در حالی که $n = 2,3,4,\ldots$ باشد؛ پس: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$ فورمول حد وسطی ترادف هندسی می‌باشد.

مجموعه قسمی ترادف ها:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n = \sum_{1=i}^{\infty} a_i$$

را به نام یک سلسلهٔ بی نهایت و یا Series یاد می‌کنند.

سلسلهٔ $\sum_{k=1}^{n} a_k + \ldots + a_1 + a_2 + a_3$ را به نام حاصل جمع قسمی n حد سلسلهٔ مذکور یاد می‌کنند.

فورمول مجموع قسمی n حد اول ترادف حسابی:

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

فورمول حاصل جمع n حد ترادف هندسی:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \qquad q \neq 1$$

سلسله‌های هندسی لایتناهی

در یک سلسلهٔ هندسی اگر $|q| < 1$ باشد و حاصل جمع n حد اول آن به یـک عـدد معین $\frac{a}{1-q}$ تقـرب نماید در این حالت سلسله را متقارب گویند و قیمت آن از فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ به دست می‌آید.

هرگاه $|q| \geq 1$ و تعداد حدود آن معلوم نباشد آن سلسله را متباعد می‌نامند؛ یعنی حاصل جمع n حد اولی سلسلهٔ فوق به یک عدد معین تقرب نکرده است: $S_{\infty} = \infty$



تمرین فصل چهارم

سؤال‌های زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب درست را دریافت و دور آنرا حلقه نمایید.

1- حد n–ام ترادف ... $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},...$ عبارت است از:

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $\quad c)\ \frac{n}{n-c}$ $\quad d)\ \frac{n+1}{n}$

2- اگر $a_n=\frac{3n-1}{2n-1}$ حد $n-$ام آن باشد؛ کدام حد این ترادف $\frac{11}{7}$ می‌شود:

$a)\ 3$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ 6$

3- حد دوازدهم ترادف حسابی $-9,-5,-1,3,...$ عبارت است از:

$a)\ 35$ $\quad b)\ 38$ $\quad c)\ -35$ $\quad d)\ -38$

4- فرق مشترک ترادف حسابی $0.1\ ,\ 0.4\ ,\ 0.7\ ,\ 1\ ,\ 1.3,...$ عبارت است از:

$a)\ 0.3$ $\quad b)\ 0.1$ $\quad c)\ 0.3$ $\quad d)\ 0.2$

5- نسبت مشترک ترادف هندسی عبارت است از: $96,48\ ,24,\ 12\ \ ,6,...$

$a)\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

6- حد دهم ترادف هندسی $5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\frac{5}{8},\frac{5}{16},.....$ عبارت است از:

$a)\ -\frac{3}{512}$ $\quad b)\ \frac{5}{512}$ $\quad c)\ -\frac{3}{512}$ $\quad d)\ -\frac{5}{512}$

7- فورمول حاصل‌جمع n حد یک ترادف هندسی عبارت است از:

$a)\ S=a\cdot\frac{1+q^n}{1-2}$ $\quad b)\ S=a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c) S=a\cdot\frac{1+q^n}{1+q}$ $\quad d)$ هیچ کدام

8- در سلسله‌های متقارب غیرمعین هندسی نسبت مشترک q عبارت است از:

$a)\ q=0$ $\quad b)\ |q|>1$ $\quad c)\ |q|<1$ $\quad d)$ هیچ کدام

سؤال‌های زیر را حل کنید.

1- چند عدد دو رقمی طبیعی داریم که مضرب چهار باشند؟

2- بین اعداد 21 و 31 سه عدد را جا دهید.

$21\square,\square,\square,31$

3- اگر مجموعهٔ حد اول و آخر ترادف عددی 124 باشد و مجموع n حد اول آن 3720 باشد تعداد حدود این ترادف کدام است؟

4- مجموع 100 حد ترادف زیر را به دست آورید.

$3,5,7,9,11,...$

5- اگر حد دوم یک ترادف هندسی 6 وحد هفتم آن 192 باشد نسبت مشترک را تعیین کنید.

6- مجموع 8 حد اول یک ترادف هندسی 17 برابر مجموع چهارحد اولی آن است، نسبت مشترک این ترادف را حساب کنید.

7- حاصل جمع سلسله زیر را به دست آورید.

$0.1+0.01+0.001+0.0001+...$

8- حد اول یک ترادف هندسی نامحدود 9 حد و چهارم آن $\frac{1}{9}$ می‌باشد، مجموع حدود این ترادف را دریافت کنید.

9- بین اعداد 3 و 96 به تعداد 4 عدد را جا دهید.

$3\square,\square,\square,\square,96$

10- حاصل جمع 8 حد اول سلسلهٔ هندسی $...+\frac{2}{9}+\frac{2}{3}+2$ را معلوم کنید.

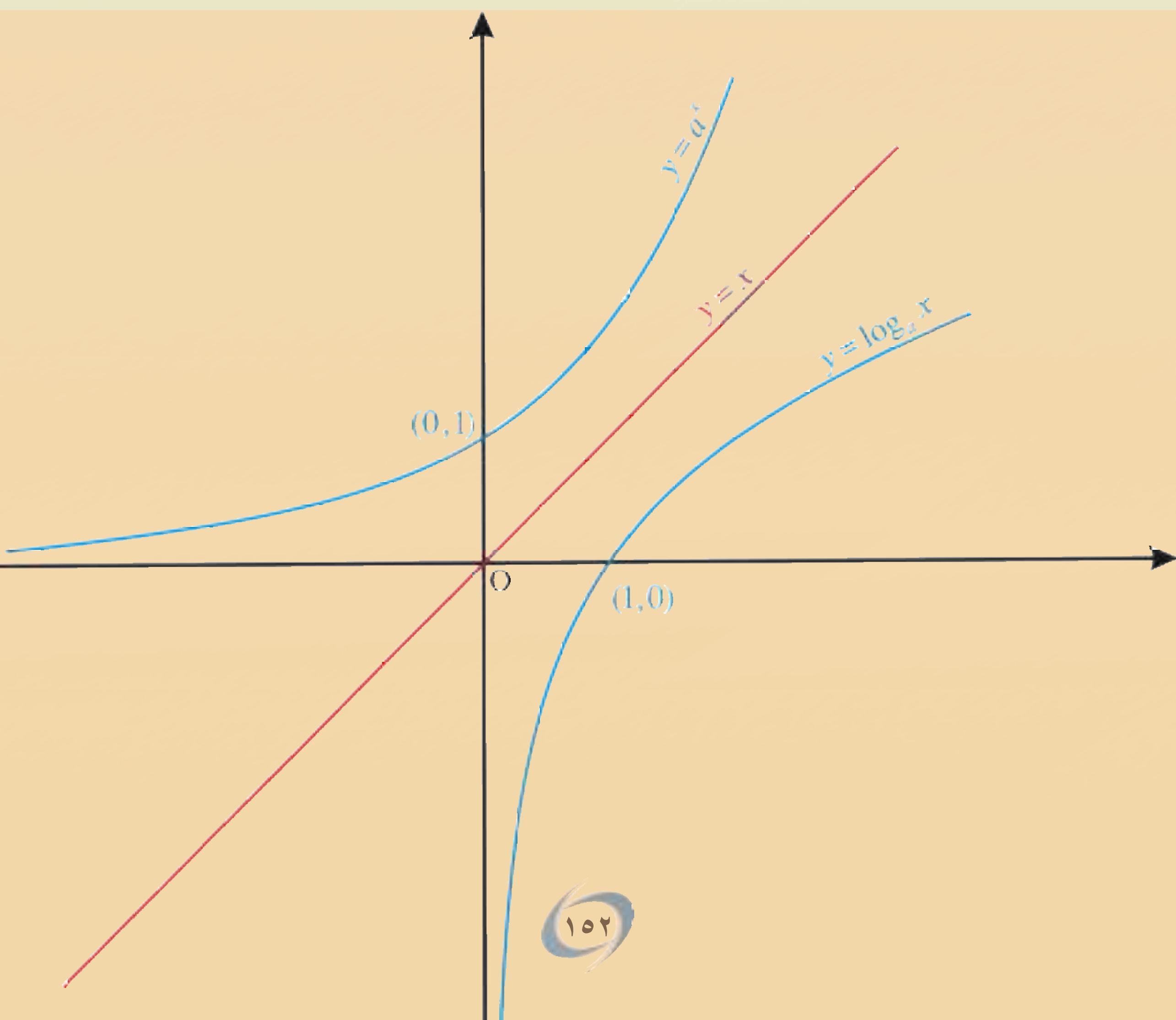
11- اگر $a=4$,$d=3$ باشد. ترادف هارمونیکی آنرا برای $n=12$ به دست آورید.

12- اعداد اعشاری زیر را با استفاده از سلسلهٔ متقارب به کسر عام به دست آورید.

$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad b)\ 3.\overline{57}$

فصل پنجم

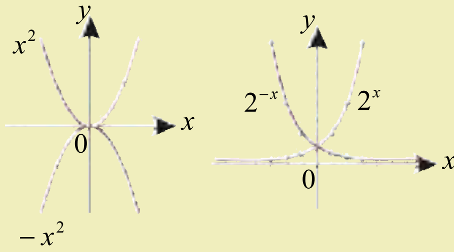
لوگاریتم



$y = a^x$
$y = x$
$y = \log_a x$
(0,1)
O
(1,0)

توابع اکسپوننشیل

Exponential functions



می دانید گراف‌های توابع $f(x)=x^2$ ، $f(x)=-x^2$ یکی با دیگر نظر به محور x متناظر اند؛ آیا تا به حال در مورد گراف‌های توابع $f(x)=2^x$ ، $f(x)=2^{-x}$ در سیستم مختصات قایم فکر کرده اید؟

تعریف

هرگاه a یک عدد مثبت و $a\neq 1$ باشد $f(x)=a^x$ را به نام تابع اکسپوننشیل به قاعدهٔ a می‌نامند.

$$a\in IR^+-\{1\}\quad x\in R\quad f:\ IR\to IR^+$$

$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ ، $f(x)=2^{-x}$ توابع اکسپوننشیل به قاعدهٔ 2 می‌باشند.

فعالیت

- برای قیمت‌های مختلف $x\in ZI$ (ZI ست اعداد تام)، گراف تابع $f(x)=2^x$ را رسم کنید.
- تابع $f(x)=2^x$ محور y را در کدام نقطه قطع می کند؟
- تابع $f(x)=2^x$ یک تابع متزاید، متناقص و یا ثابت است؟ چرا؟
- گراف‌های توابع $f(x)=2^x$ ، $f(x)=2^{-x}$ را در یک سیستم کمیات وضعیهٔ قایم رسم نموده باهم مقایسه کنید.
- فعالیت فوق را برای تابع $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ انجام دهید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

- قیمت تابع $f(x)=2^x$ برای تمام قیمت‌های $x\in ZI$ همیشه مثبت است.

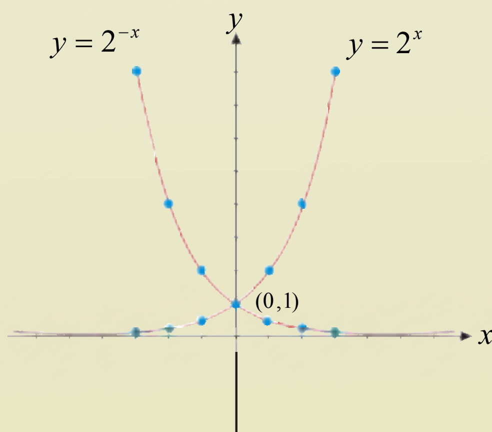
- گراف تابع $y=2^x$ و $y=2^{-x}$ نظر به محور y متناظر اند؛ یعنی هر نقطهٔ گراف تابع $y=2^x$ به یک نقطه بالای گراف $y=2^{-x}$ تقابل می کند.
- گراف تابع $y=2^x$ متزاید است؛ زیرا: $a=2>1$ است.

یادداشت: هرگاه $y=-2^x$ باشد، تابع متناقص است؛ زیرا $a=-2<0$

گراف تابع $y=2^x$ و $y=2^{-x}$ را رسم می‌نماییم.

گراف تابع $y=2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

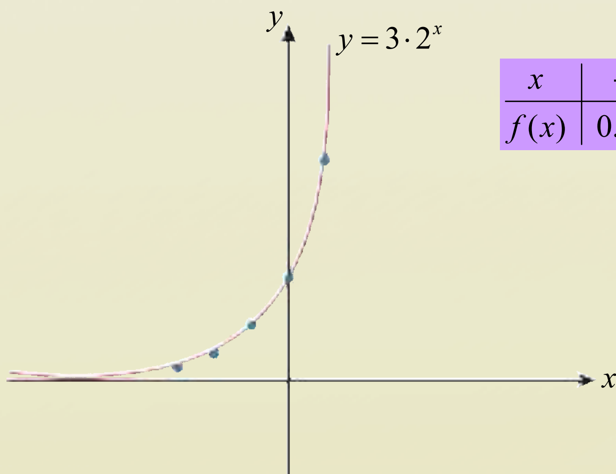


گراف تابع $y=2^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: گراف تابع اکسپوننشیل $f(x)=3\cdot 2^x$ را رسم کنید.

حل: با در نظرداشت نتیجهٔ بالا می‌دانیم که در تابع اکسپوننشیل $f(x)=3\cdot 2^x$ قاعدهٔ آن $a=2$ است؛ پس به این اساس تابع فوق یک تابع متزاید است برای آن که گراف تابع فوق را دقیق رسم نمایید قیمت‌های مختلف برای متحول x داده از روی آن قیمت‌های توابع y را دریافت کرده و در جدول درج و نقاط را در سیستم مختصات قایم قرار داده و به کمک آن نقاط گراف را رسم کنید.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

فعالیت

- با در نظر داشت تابع $f(x) = a^x$ برای تمام اعداد حقیقی x, y روابط زیر را ثبوت نمایید:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

خواص توابع اکسپوننشیل

با استفاده از معلومات قبلی خواص توابع اکسپوننشیل را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

1- در هر تابع اکسپوننشیل ناحیهٔ تعریف اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌های آن اعداد حقیقی مثبت است.

2- هر تابع اکسپوننشیل تابع یک به یک (injective) است، یعنی برای هر $x_1 \neq x_2$ همیشه $f(x_1) \neq f(x_2)$

3- هر تابع اکسپوننشیل برای $a > 1$ متزاید و برای $a < 1$ متناقص است.

4- گراف هر تابع اکسپوننشیل از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد.

5- گراف‌های توابع اکسپوننشیل $f(x) = a^x$, $g(x) = a^{-x}$ نظر به محور y متناظر واقع اند.

6- به این ترتیب هر تابع اکسپوننشیل معکوس دارند که به $\log_a x$ نشان داده می‌شود. توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ معکوس یکدیگر اند.



تمرین

گراف‌های توابع اکسپوننشیل زیر را در سیستم مختصات قایم رسم کنید.

$a)\ f(x) = 2.3^x$

$b)\ f(x) = 2.3^{-x}$

$c)\ f(x) = (\frac{1}{2})^x$

$d)\ f(x) = (4)^{-x}$

لـوگاریتـم

Logarithm

آیا توابع اکسپوننشیل را به شـکل دیگـر مـی‌تـوان نوشت؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:

y (اعداد داده شده)	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
a^x (اعداد توان دار)		10^{-3}				10^4
x (توان)	-4			2		

- درعدد طاقت دار 10^{-3} قاعده و توان آن مساوی به چند است؟
- آیا قاعدهٔ یک عدد (1) شده می‌تواند؟ اگر جواب منفی باشد چرا؟
- آیا توان یک عدد را به نام دیگر ارائه کرده می‌توانیم؟

از تکمیل جدول فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد:

تعریف: لوگاریتم عبارت از طرز ارائه‌یی نوع دیگر از طاقت می‌باشـد و یـا ایـن کـه محاسبه تـوان مجهول را به نام لوگاریتم یاد می کنند.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

در رابطهٔ فوق a را به نام قاعده(Base) و y را به نام لوگاریتم عدد یـاد مـی‌کننـد. لوگـاریتم یـک عدد داده شده عبارت از توانی است که اگر قاعده به آن تـوان بلنـد بـرده شـود. عـدد داده شـده را افاده می کند.

در جدول فوق توان‌های قاعدهٔ عدد 10 عبارت از لوگاریتم عدد داده شده می‌باشد؛ به طور مثال:

$$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$$

برای هر عدد $a > 0\ , a \neq 1$ به حیث قاعدهٔ لوگاریتم شده می‌تواند.

مثال: افاده‌های زیر را با استفاده از تعریف لوگاریتم به افاده‌های معادل (اعداد توان دار) آن بنویسید.

$$\log_2 8 = 3$$
$$\log_{10} 1000 = 3$$

حل:

$$\log_2 8 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 8$$
$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 10^3 = 1000$$

تمرین

1- روابط لوگاریتمی زیر را با افاده‌های معادل آن بنویسید.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2- افاده‌های زیر را با استعمال مفهوم لوگاریتم با افاده‌های معادل آن بنویسید.

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

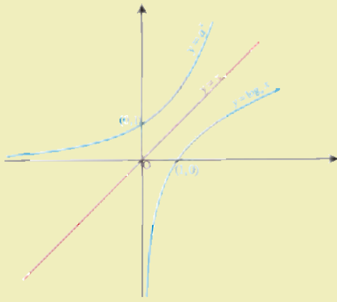
$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^1$

$f)\quad y = 3^x$

توابع لوگاریتمی



آیـا گفتـه مـی‌توانیـد، توابـع نمـایی دارای تـابع معکوس می‌باشند؟

توابع نمایی که دارای معکوس انـد نظر بـه کـدام محور سیستم مختصات قایم متناظراند.

تعریف

معکـــوس تـــابع اکسپوننـــشیل بـــه نـــام تـــابع لوگـــاریتمی یـــاد مـــی‌شـــود

$$f: IR \to R^+, f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$$

عبارت از تابع لوگاریتمی است که قاعدهٔ آن a بوده و به شکل زیر نشان داده می‌شود:

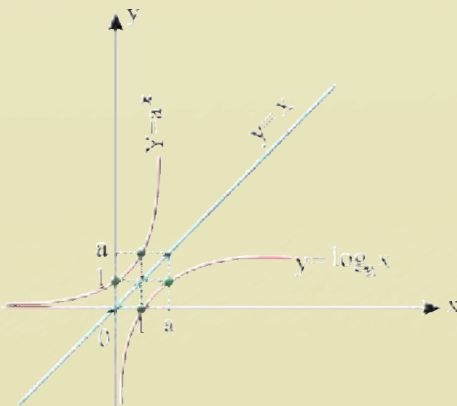
$$f^{-1}: IR^+ \to IR, f^{-1}(x) = \log_a x \quad , \quad a \in IR^+, a \neq 1$$

ویا:

$$f(x) = y = a^x$$

$$f^{-1}(x) = x = a^y = \log_a x = y$$

در شکل گراف تابع $f(x) = a^x$ و $y = \log_a x$ رسم شده است، دیده می‌شود متناظر یکدیگر اند.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

در جـدول بـالا دیـده مـی‌شـود کـه هرگـاه $a>1$ باشـد بـرای هـر $\forall x_1,x_2\in IR$ داریـم:

$x_1>x_2$, $\log_a x_1>\log_a x_2$ می‌باشد.

مثال 1: گراف تابع $y=3^x$ و $y=\log_3 x$ را رسم کنید.

حل: تابع $y=3^x$ را در نظر می‌گیریم.

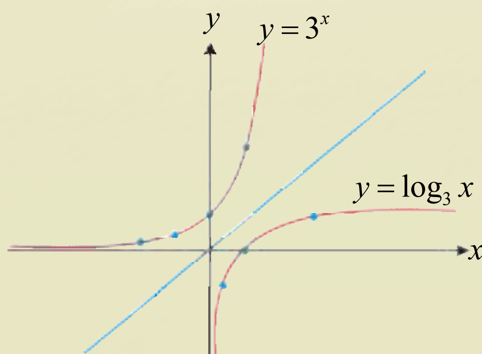
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

حالاتابع $y=\log_3 x$ را در نظر می‌گریم:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\log_3 1 \end{array}\right\}(1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=\log_3 3 \end{array}\right\}(3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\log_3 \frac{1}{3}=y=\log_3 3^{-1}=-1 \end{array}\right\}(\frac{1}{3},-1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

- با در نظرداشت گراف توابع اکسپوننشیل $2^x, (\frac{1}{2})^x$ از روی تعریف تابع اکسپوننشیل قیمت توابع معکوس آن را برای $x=1,2$ دریافت نموده و نتیجه را به شکل عمومی بنویسید.

نتیجه: برای هر تابع لوگاریتمی مانند $\log_a x$ برای یک قاعدهٔ اختیاری داریم:

$$\log_a^1=0 \ , \ \log_a^a=1 \ , \ a\in IR \ , a>0 \ , a\neq 1$$

مثال 2: اگر $f(x)=\log_3 x$ داده شده باشد، قیمت‌های $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ را به دست آورید.

حل: در تابع داده شده به جای x قیمت‌های آن را وضع می‌کنیم:

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3)=\log_3 3=1$$

$$f(x)=\log_3 9 \Rightarrow f(9)=\log_3 3^2=2$$

$$f(3^{-2})=\log_3 3^{-2}=-2$$

$$f(1)=\log_3 1=0$$

مثال 3 : اگر $\log_3 x=4$ باشد قیمت x را دریافت کنید.

حل: تابع فوق را به شکل نمایی می‌نویسیم:

$$\log_3 x=4 \Leftrightarrow 3^4=x \Leftrightarrow x=81$$

با استفاده از معلومات فوق خواص تابع لوگاریتمی را به قسم زیر بیان می‌کنیم:

خواص تابع لوگاریتمی

1- ساحۀ تحول تابع لوگاریتمی ست اعداد حقیقی می‌باشد.

2- قسمی که $\log_a 1=0$ برای هر قاعده اختیاری است؛ پس به این اساس تابع لوگاریتمی تنها یک جذر حقیقی $x_0=1$ دارد. بدین ترتیب گراف تابع لوگاریتمی در سیستم مختصات قایم از نقطه (1.0) می‌گذرد.

3- هر تابع لوگاریتمی تابع یک به یک (injective) بوده؛ یعنی برای هر $x_1 \neq x_2$ همیشه $f(x_1)\neq f(x_2)$ است.

مثال4: قیمت تابع $f(x)=\log_2 x$ را برای قیمت $x=16, \frac{1}{8}$ دریافت کنید.

حل: در تابع داده شده $f(x)=\log_2 x$ قیمت‌های داده شده x را وضع می‌کنیم.

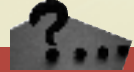
$$f(x)=\log_2 x=f(16)=\log_2 16 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 2^4=4$$

$$f(x)=\log_2 x=f(\frac{1}{8})=\log_2(\frac{1}{8}) \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 2^{-3}=-3$$



فعالیت

- قیمت تابع $f(x)=\log_2 x$ را برای قیمت‌های $\sqrt{2}$, $x=28$ محاسبه کنید؟



تمرین

1- برای تابع $f(x)=\log_2 x$ قیمت‌های $f(2)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{32})$, $f(32)$ را دریافت کنید.

2- برای تابع $f(x)=\log_3 x$ قیمت‌های $f(1)$, $f(\frac{1}{81})$ را دریافت کنید.

لوگاریتم معمولی و لوگاریتم طبیعی

Common logarithm and Natural logarithm

آیا قاعدهٔ لوگاریتم تنها اعداد 2 و 3 است، ویا اعداد دیگر هم تا عدهٔ لوگاریتم شده می‌تواند؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعریف

طوری که دیدیم به غیر از 1 هر عدد مثبت دیگر می‌تواند قاعدهٔ لوگاریتم باشد؛ ولی قاعده‌های که معمولاً در عمل به کار برده می‌شوند؛ عبارت از: عدد 10 و e می‌باشد.

1- لوگاریتم معمولی: لوگاریتمی که قاعدهٔ آن عدد 10 باشد به نام لوگاریتم معمولی یا (Briggs سیستم) یاد می‌شود،(Briggs) نام شخص است که این سیستم را وضع کرده است. لوگاریتم معمولی را به سمبول log نشان می‌دهند.

و به طور زیر ارایه می گردد:

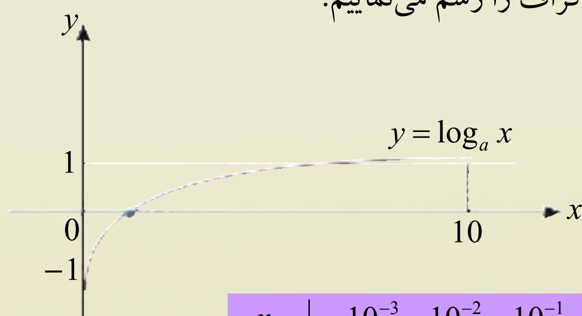
$$f: IR^+ \longrightarrow IR \log_{10}^x ,\ f(x) = \log_{10}^x = \log x$$

مثال: لوگاریتم‌های اعداد 10^{-1} 10^3 10^2 10^1 10^0 را محاسبه کنید.

حل:

$$\log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$
$$\log 10^1 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$
$$\log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$
$$\log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$
$$\log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

با در نظرداشت قیمت‌های مختلف x گراف را رسم می‌نماییم:



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2- لوگاریتم طبیعی: لوگاریتمی که قاعدهٔ آن عدد e باشد به نام لوگاریتم طبیعی Natural logarithms یاد گردیده، به ln نشان داده می‌شود. و چنین می‌نویسم.

$f: IR^{+} \longrightarrow IR\ ,\ f(x)=\log_e x=\ln x$

e یک عدد غیر ناطق بوده و قیمت تقریبی آن عبارت است از $e=2.718281828...$ که از روی لیمت $(1+\frac{1}{x})^x$ وقتی که x به بی نهایت تقرب کند بدست می‌آید دریافت قیمت e مربوط ریاضیات عالی می‌باشد. عدد e به نام عدد اویلر یاد می‌گردد. تابع $f(x)=e^x$ را به نام تابع اکسپوننشیل یاد می‌کنند. و به شکل $Exp(x)=e^x$ نیز می‌نویسند.

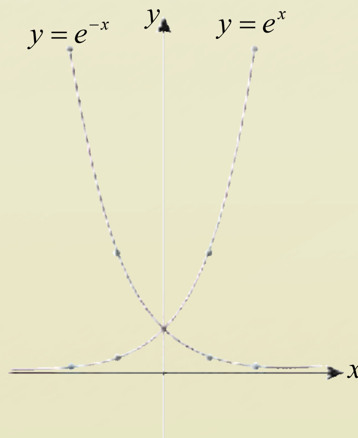
گراف تابع $y=e^x$ شبیه گراف تابع $y=a^x$ می‌باشد، برای تابع $y=e^x$ قیمت‌های مختلف به x می‌دهیم.

x	-2	-1	0	1	2
$y=e^x$	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

برای تابع $y=e^{-x}$ قیمت‌های مختلف به x می‌دهیم.

x	-2	-1	0	1	2
$y=e^{-x}$	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

با درنظرداشت قیمت‌های تقریبی فوق گراف تابع $y=e^{x}$ و $y=e^{-x}$ را رسم می‌نماییم.



لوگاریتم طبیعی درمطالعهٔ ریاضیات عالی مورد استفاده قرار می‌گیرد و موارد استعمال زیاد در ساینس، الجبر، تجارت و تخنیک دارد. گراف لوگاریتم طبیعی تابع $y=\ln x$ طور زیر است:

مثال: $\ln e^{1}$, $\ln e^{2}$, $\ln e^{3}$, $\ln e^{0}$ $\ln e^{-1}$, $\ln e^{-2}$ را دریافت کنید.

حل: نظر به تعریف می‌توان نوشت: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$

$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$

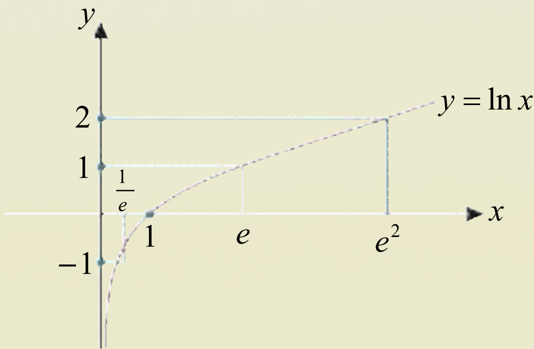
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$

$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$

$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$

$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

گراف تابع $y = \ln x$ عبارت است از:



فعالیت

- $y = \ln \frac{1}{e7}$ را دریافت کنید.
- $\log 0.0001$ را دریافت کنید.

تمرین

لوگاریتم‌های زیر را محاسبه کنید:

$a)\ \log_e e^8$ $\qquad b)\ \ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c)\ \log 0{,}01$ $\qquad d)\ \log \frac{1}{10^{-2}}$

قوانین لوگاریتم

Law of logarithm

می‌دانید اعداد طاقت‌دار از خود قوانین دارند، آیا لوگاریتم اعداد هم، دارای قوانین است یا نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

فعالیت

- قوانین حاصل ضرب طاقت‌نماها را بنویسید.
- قوانین حاصل تقسیم طاقت‌نماها را بنویسید.
- هر عدد به توان صفر و یک مساوی به چند است.

مشابه به خواص طاقت لوگاریتم هم‌دارای قوانین می‌باشد.

قانون اول: لوگاریتم هر عدد در ساحهٔ تعریف، لوگاریتم به قاعدهٔ خود عدد مساوی به I است.

$a \in IR,\ a \neq 1, \log_a a = 1$

ثبوت: می‌دانیم که $\forall a \in IR^+ I\{1\}\ \ a^1 = a$ است.

بنابرآن $\log_a a = 1$

مثال اول: $\log_5 5 = 1 \Rightarrow 5^1 = 5$

قانون دوم: می‌دانیم لوگاریتم عدد I به هر قاعده مساوی به صفر است.

$\forall a \in IR^+ I\{1\}\ , a^0 = 1$

پس: $\log_a 1 = 0$

مثال دوم: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

قانون سوم: لوگاریتم حاصل ضرب دو یا چندین عدد مساوی به حاصل جمع لوگاریتم‌های شان است.

یعنی: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

ثبوت: اگر داشته باشیم:

$$x = a^p \quad .... \quad I$$
$$y = a^q \quad .... \quad II$$

روابط I و II را طرف به طرف ضرب نموده، داریم که: $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

از اطراف رابطهٔ فوق لوگاریتم می گیریم، به جای pوq قیمت‌های آن را قرار می‌دهیم:

$$\log_a(x \cdot y) = p + q$$
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

مثال 1: لوکاریتم عدد 50 را به دست آورید.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

مثال 2: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log(2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$



فعالیت

- درست بودن غیرمساوات‌های زیر را توسط مثال نشان دهید.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

قانون چهارم: لوگاریتم حاصل تقسیم دو عدد مساوی به حاصل تفریق لوگاریتمی صورت و مخرج است؛ یعنی: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

ثبوت: اگر $x = a^p$ و $y = a^q$ داشته باشیم.

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \quad .... \quad I \\ y = a^q \quad .... \quad II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log x = p \\ \log y = q \end{array}$$

روابط I و II را طرف به طرف تفسیم نموده داریم که: $\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \Leftrightarrow \log_a(\frac{x}{y}) = p - q$

به جاهای p و q قیمت‌های آن را وضع می‌کنیم. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

مثال 1: $\log\frac{5}{2}$ را محاسبه کنید در صورتی که $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ باشد.

حل:
$$\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$$

مثال 2:
$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$$

حل: قانون چهارم را از راست به چپ تطبیق می‌کنیم:

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log_y(5y)$$
$$= \log_y 5 + \log_y y = \log_y 5 + 1$$

قانون پنجم: لوگاریتم یک عدد توان‌دار مساوی است به توان ضرب در لوگاریتم همان عدد؛

یعنی: $\log_a x^n = n\log_a x$

ثبوت:

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \dots\ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{n\ \text{دفعه}\ \log_a x}$$

در نتیجه: $\log_a x^n = n\log_a x$

با استفاده از قانون 5 می‌توان نوشت:
$$\log_a\sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

مثال 1: $\log 625 = ?$

حل:
$$\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$$

مثال 2: $\log_3\sqrt[3]{9} = ?$

حل:
$$\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

فعالیت

- لوگاریتم‌های زیر را دریافت کنید:

$\log_3(0.12)=?$ $\qquad$ $\log_5\sqrt{8}=?$

تمرین

1- افاده‌های حاصل ضرب را به شکل حاصل جمع و افاده‌های حاصل جمع را به شکل حاصل ضرب بنویسید و در صورت امکان جواب نهایی را به دست آورید.

$a)\ \log_4(5x^2)=?$ $\qquad$ $b)\ \log_{10}(10x^2y)=?$

$c)\ \log_{10}5+\log_{10}20=?$ $\qquad$ $d)\ \log_{12}36+\log_{12}14=?$

2- افاده‌های خارج قسمت را به تفاضل و تفاضل را به خارج قسمت تبدیل کنید و در صورت امکان جواب نهایی را به دست آرید.

$a)\ \log_7\frac{63}{49}=?$ $\qquad$ $b)\ \log\frac{125}{80}=?$

$c)\ \log_a(x^2a)-\log_a x^2=?$ $\qquad$ $d)\ \log_{10}1000-\log_{10}100=?$

3- لوگاریتم‌های زیرا را محاسبه کنید:

$a)\ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad$ $b)\ \log_2(-8)^{-\frac{1}{3}}$

تبدیل قاعدهٔ لوگاریتم به قاعدهٔ دیگر

اگر لوگاریتم یک عدد، به یک قاعدهٔ معین داده شده باشد. چطور می‌توان لوگاریتم عدد نامبرده را به یک قاعدهٔ دیگر تبدیل کرد؟

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

قانون ششم: حاصل تقسیم لوگاریتم دو عدد به عین قاعده مساوی است به:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: برای ثبوت، $\log_b m = y$ را قرار می‌دهیم و شکل نمایی آن را می‌نویسیم $m = b^y$

از اطراف، به قاعدهٔ a لوگاریتم می گیریم: $\log_a m = \log_a b^y \Rightarrow \log_a m = y\log_a b$

قیمت y را در رابطهٔ فوق وضع می کنیم:

$$\log_b m = \log_b m \cdot \log_a b$$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m.\log_a b}{\log_b b} = \frac{\log_b m}{\log_a b} = \log_b m$$

اطراف این رابطه را به $\log_9 b$ تقسیم می‌نماییم

مثال: $\log_9 27 = ?$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از قانون ششم داریم: $\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$

مثال2: $\log_3 75 = ?$ را محاسبه کنید.

حل: $\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$

یادداشت: لوگاریتم معکوس یک عدد مساویست به منفی لوگاریتم همان عدد که آن را به نام $Co\log arithm$ یا (clog) همان عددیاد می کنند؛ یعنی:

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$

قانون هفتم: معکوس لوگاریتم یک عدد مساوی است به: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: برای ثبوت $\frac{1}{\log_M a} = x$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 \text{ .... I}$$

در رابطهٔ I به جای عدد 1 قیمت آن را وضع می کنیم:

$$1 = \log_M M$$

$$= \log_M a^x = \log_M M$$

$$\Rightarrow a^x = M$$

ازا طراف رابطهٔ فوق لوگاریتم به قاعدهٔ a می گیریم $\log_a M = x$

در رابطهٔ فوق به جای x قمیت آنرا وضع می کنیم: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

مثال 1: $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لوگاریتم‌های زیر را حساب کنید.

$\log_{64} 2 = ?$ $\qquad \log_4 \sqrt{256} = ?$

قانون هشتم: لوگاریتم یک عدد که قاعدهٔ آن دارای توان است مساوی است به:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

ثبوت: برای ثبوت $\log_a x = m$ قرار داده آن را به شکل نمایی بنویسید.

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}}$$

$$\Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

از اطراف رابطهٔ فوق لوگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot m$$

قیمت m را به جای آن در رابطهٔ فوق وضع می‌کنیم:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

از قانون فوق، نتایج زیر را می‌توان به دست آورد:

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$



فعالیت

- نتایج فوق را ثبوت کنید.

مثال 1: $\log_{25} 125 = ?$

حل: $\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3$

نظر به قانون $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$ می‌توان نوشت:

$$= \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

مثال 2: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}} \log_3 3 = 6(-3)\log_3 3 = -18 \cdot 1 = -18$$



فعالیت

- با استفاده از خاصیت‌های فوق، لوگاریتم‌های زیر را ساده سازید.

$a)\quad \log_3 6 = ?$ $\qquad b)\quad \log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

رابطه بین لوگاریتم معمولی و طبیعی

بـا درنظـر داشـت قاعـدههـای ایـن دو لوگـاریتم یعنـی اعـداد 10و e بـا اسـتفا ده از رابطـهٔ $\log_b x = \log_a x = \log_a b$ که b,a و x اعداد مثبت و b,a خلاف یک باشند.

اگر $a = e$ و $b = 10$ وضع شود؛ بنابر آن:

$$\log_{10} = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

میدانیم که :

$$\log_e x = \log_{10} x . \log_e 10$$

$$\ln x = \log_e 10 . \log x$$

$$\ln x = 2{,}326 . \log x$$

اگر $b = e$ و $a = 10$ وضع شود بنابرآن:

$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x . \log_{10} e$$

$$\log x = \log e . \ln x$$

چون: $\log_{10} e = 0{,}4343$ است بنابرآن:

$$\log x = 0{,}4343 . \ln x$$

مثال اول: میدانیم که $\ln 4.69 = ?$ را دریافت کنید.

حل: میدانیم که:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

مثال دوم: قیمت $\log 6{,}73$ را دریافت کنید. در حالیکه $\ln 6.73 = 1{,}9066$ باشد؟

حل: با استفاده از روابط گذشته داریم:

$$\log x = 6{,}4343 . \ln x$$

$$\log 6{,}73 = 0{,}4343 . \ln 6{,}73 = 0{,}4343 . 1{,}9066 = 0{,}8280$$



تمرین

لوگاریتمهای زیر را ساده سازید.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$ $\quad b)\ \log_9 27 = ?$ $\quad c)\ \log_8 4 = ?$

$d)\ \log_{121} 14641 = ?$ $\quad e)\ \ln 672000$ $\quad f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 0.235$

کرکترستیک و مانتیس

Characteristic and Mantissa

می‌دانید که:

$$\log_{10}1000 = 3 \ , \ \log_{10}100 = 2 \ , \ \log_{10}1 = 0$$

بوده، بنابر این بین تعداد ارقام یک عدد و لوگاریتم آن چه رابطه وجود دارد؟

$$\log 0{,}501$$
$$\log 5{,}01$$
$$\log 50{,}1$$
$$\log 501$$

تعریف

می‌دانیم که هرعدد حقیقی مثبت x به شکل $x = S \cdot 10^n$ نوشته شده می‌تواند. طوری که $n, 1 \le s < 10$ یک عدد تام است.

اگر لوگاریتم x مطلوب باشد، طور زیر دریافت می‌شود.

$$\log x = \log(s.10^n) = \log s + \log_{10}{}^n = \log s + n\log 10 = \log s + n$$

$\log s$ را در صورتی که $1 \le s < 10$ باشد، قسمت اعشاری یا مانتیس $\log x$ یاد می‌کنند، n یک عدد تام است که به نام مشخصه یا کرکترستیک $\log x$ یاد می‌شود. به خاطر باید داشت که:

$$0 \le \log s < 1$$

از رابطهٔ بالا این نتیجه به دست می‌آید که لوگاریتم یک عدد بین صفر و یک قرار دارد.

فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید.

شکل توان دار اعداد	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^0$	$1000 = 10^3$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^1$	$20 = 10^{1.390}$
به شکل لوکاریتمی	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوکاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

- لوگاریتم اعدادی که بین 0 و 10، بین 10 و 100 و بین 0.01 و 0.001 قرار دارد مساوی به چند است؟

- آیا هر قدر که عدد بزرگ شود لوگاریتم آن هم بزرگ می‌شود؟
- لوگاریتم اعداد کوچکتر از 1 منفی است یا مثبت؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را می‌توان بیان کرد؟

اگر $1 \le x < 10$ باشد؛ پس کرکترستیک(مشخصهٔ) آن مساوی به صفر است.

اگر $10 \le x < 100$ باشد؛ پس کرکترستیک آن مساوی به عدد 1 است.

اگر $100 \le x < 1000$ باشد؛ پس کرکترستیک آن مساوی به 2 می‌باشد.

لوگاریتم هر عدد از دو بخش تشکیل گردیده: قسمت صحیح و مانتیس.

قسمت صحیح را کرکترستیک و قسمت اعشاری را مانتیس می گویند. توان عدد 10 کرکترستیک لوگاریتم عدد می‌باشد و مانتیسا را از روی جدول به دست می‌آوریم.

عدد نویسی به طریقهٔ علمی Scientific notation

هر عدد را می‌توانیم به شکل توان 10 بنویسیم؛ طور مثال: عدد N را چنین می‌نویسیم $N = a \cdot 10^n$ در صورتیکه $1 \le a < 10$ بوده و n یک عدد تام است.

مثال 1: اعداد زیر را به طریقهٔ عدد نویسی علمی بنویسید.

$a)\ 2573 \qquad b)\ 573216 \qquad c)\ 0.0028$

حل:

$a)\ 2573 = 2.573 \cdot 10^3$

$b)\ 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)\ 0.0028 = \frac{28}{10,000} = \frac{28}{104} = 28.10^{-4} = 2,8.10.10^{-4} = 2,8.10^{-3}$

قاعده: اگر قسمت صحیح یک عدد خلاف صفر باشد؛ پس کرکترستیک لوگاریتم آن عدد مساوی است به تعداد ارقام قسمت صحیح، منفی یک.

مثال 2: کرکترستیک $\log 526.9$ مساوی به چند است؟

حل: قسمت صحیح عدد سه رقمی است؛ پس کرکترستیک آن $3-1=2$ می‌شود.

کرکترستیک اعداد کوچکتر از یک، دارای علامت منفی بوده و قیمت آن یکی بیشتر از تعداد صفرهای طرف راست علامت اعشاری می‌باشد.

مثال 3: کرکترستیک $\log 0.002$ مساوی به چند است؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0,002 &= \log(2.10^{-3}) \\ &= \log 2 + \log 10^{-3} \\ &= \log 2 - \log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

پس کرکترستیک آن مساوی به 3- می‌باشد.

با استفاده از دو مثال فوق، کرکترستیک اعداد زیر را می‌توان دریافت کرد.

کرکترستیک		لوگاریتم
4	$5-1$	$\log 89435$
1	$2-1$	$\log 56.784$
-1	$0-1$	$\log 0.995$
-2	$-1-1$	$\log 0.0789$



تمرین

کرکترستیک لوگاریتم‌های زیر را شفاهی بگویید؟

$a)\ \log 0.9560$ $b)\ \log 956.0$ $c)\ \log 9560$

$d)\ \log 0.0009560$ $e)\ \log 3.875$ $f)\ \log 2345$

جدول لوگاریتم

قسمی که ما در درس قبلی دیدیم، لوگاریتم یک عدد از دوقسمت(کرکترستیک و مانتیس) تشکیل شده است. برای دریافت مانتیس آن چگونه عمل می کنید؟

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

طریقهٔ دریافت مانتیس

می‌دانیم که لوگاریتم هر عدد از دو قسمت صحیح و اعشاری تشکیل شده است؛ طوری که قسمت‌های صحیح یا مشخصه عبارت از توان‌های عدد 10 می‌باشد و مانتیس را از روی جدول لوگاریتم به قاعدهٔ 10 که قبلاً ترتیب گردیده؛ استفاده می‌شود. این جدول‌ها تا هفت، بعضی تا پنج و بعضی هم تا چهار و سه خانه اعشاریه ترتیب شده که نظر به تعداد ارقام تام اعشاری آن، جدول‌ها نام گذاری گردیده اند؛ مانند جدول‌ها چهار رقمی، پنج رقمی وهفت رقمی؛ برای دریافت مانتیس یک عدد مورد نظر ارقام عدد داده شده را از طرف چپ در نظر گرفته به استثنای یک رقم، طرف راست آن عدد را در جدول ملاحظه نموده که به کدام ستون رقم طرف راست عدد است .تقا طع سطر وستون عدد اعشاری مانتیس آن عدد می‌باشد.

مثال 1:

$\log 765 = ?$

حل:

$$\begin{aligned}\log 765 &= \log(7.65.10^2)\\ &= \log 7.65 + \log 10^2\\ &= \log 7.65 + 2\end{aligned}$$

مانتیس ← $\log 7.65$ ، کرکترستیک ← 2

در مثال فوق عدد 2 عبارت از کرکترستیک می‌باشد. بـرای دریافـت مـانتیس سـطر 76 را تحت ستون 5 ملاحظه نموده که به عدد 0.8837 مطابقت مـی‌نمایـد، یعنـی عـدد 0.8837 مانتیس عدد 765 می‌باشد.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74						↓				
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	**0.8837**	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$\log 765 = 0.8837 + 2 = 2.8837$

مثال2: $\log 70.9 = ?$ را پیدا کنید.

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**
⋮										
→ 79										
⋮										

برای دریافت لوگاریتم 70.9 سطر 70 را تحت ستون 9 ملاحظه نموده که به عدد 8506 مطابقت می‌نماید، یعنی عدد 0.8506 بوده که مانتیس عدد 70.9 می‌باشد.

$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$

مثال3: $\log 0.0247 = ?$ را بدست بیآورید.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$
$$\log 0.00247 = \log 2.47 - 3$$

سطر 24 را تحت ستون 7 ملاحظه نموده که عدد 0.3927 عبارت از مانتیسای مطلوب است.

$$\log 0.0247 = \log 2{,}24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}{,}3927$$

یادداشت: چون مانتیس، همیشه مثبت است؛ پس اگر کرکترستیک، منفی باشد و خواسته باشیم هر دوی آن را به شکل یک عدد مثبت بنویسیم علامت منفی را بالای کرکترستیک می‌نویسیم.

$$\log 0.0247 = 3927 - 2 = \bar{2}.3927$$



فعالیت

- با در نظر داشت جدول لوگاریتم $\log 9280 = ?$ را محاسبه کنید.

مثال 4: با در نظر داشت جدول زیر، لوگاریتم اعداد 15 ,105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 را دریافت کنید.

اعداد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوگاریتم	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3\cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\begin{aligned}\log(105) &= \log(5\cdot 3\cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7\\ &= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570\\ &= 2.01079\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(900) &= \log(9\cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2 = 0.95424 + 2\cdot \log 10\\ &= 0.95424 + 2\\ &= 2.95424\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(\frac{3}{4}) &= \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206\\ &= -0.12494\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(0.007) &= \log(7\cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = 0.84510 - 3\\ &= \bar{3}.84510\end{aligned}$$



تمرین

1-کرکترستیک لوگاریتم اعداد زیر طور شفاهی بگویید و مانتیس آنها را از روی جدول دریافت کنید.

$a)\ \log 222$ $\quad b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $\quad d)\ \log 527$

$e)\ \log 0.024$ $\quad f)\ \log 2400$

$g)\ \log 0.00024$ $\quad h)\ \log 24$

2- قیمت لوگاریتم‌های زیر را بدست آرید.

$a)\ \log(2.73)^3$ $\quad b)\ \log\sqrt[5]{0.0762}$

انتی لوگاریتم
Anti Logarithm

هرگاه لوگاریتم یک عدد داده شده باشد چطور می‌توان خود عدد را دریافت کرد؟

$\log 481 = 2.6821$
$\log N = 1.6580$
$N = ?$

تعریف

هرگاه $\log_a y = x$ باشد. پس y را به نام انتی لوگاریتم x می‌نامند؛ یعنی: $y = anti\log x$

مثال: اگر $\log 34 = 1.5315$ باشد انتی لوگاریتم 1.5315 مساوی به عدد 34 است.

فعالیت

- اگر $\log N = 2.8779$ باشد عدد N را تعیین کنید؟
- کرکترستیک عدد مذکور را نشان دهید.
- در جدول مانتیس 0.8779 به کدام سطرو ستون مطابقت دارد.

از فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را می‌توان بیان کرد.

نتیجه: چون کرکترستیک لوگاریتم عدد 2 است؛ مانتیس عدد سه رقمی است، آن را در جدول در سطر 75 تحت ستون 5 قرار دارد؛ سپس از روی جدول عدد $N = 75.5$ است.

مثال 1: $\log N = 2.9939$ است N را به دست آورید.

حل: قسمت مانتیس لوگاریتم مربوطه یعنی 0.9939 را در جدول لوگاریتم دریافت می‌نماییم، می‌بینیم که در کدام سطر و ستون قرار دارد. این اعداد سطر و ستون را طوری یادداشت می‌کنیم که عدد مربوط عبارت از 9.86 است؛ یعنی مانتیس عدد 9.86 عبارت از 0.9939 است.

چون در سؤال فوق 2 به حیث کرکترستیک داده شده است؛ پس تعداد ارقام صحیح عدد مطلوب 3 است، سپس عدد مطلوب عبارت است از $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

مثال2: $\log N = 0.9791$

حل:در این‌جا مانتیس 9791 را در جدول یافته اعداد مربوط به سطر و ستون را مانند فوق یاد داشت می کنیم؛ عدد مطلوب دارای ارقام 953 است؛ چون کرکترستیک صفر است؛ پس عدد مطلوب دارای یک رقم صحیح است؛ یعنی:

$N = 9.53$

$\log 9.53 = 0.9791$

$anti\log 0.9791 = 9.53$

مثال3: $\log N = -3.0531$ باشد. قیمت N را دریابید.

حل: در این‌جا می‌بینیم که کرکترستیک و مانتیس هر دو منفی اند و در جدول مانتیس عدد منفی وجود ندارد. برای این که مانتیس را مثبت ساخته باشیم عدد 1 را با مانتیس جمع و از کرکترستیک منفی می کنیم. در مساوات تغییر نمی آید.

حال می‌توانیم به کمک مانتیس 0.9469 ارقام عدد N را از جدول دریافت نمایم که عبارت اند از: 885 کرکترستیک نشان می‌دهد که بین علامت اعشاریه و اولین 8 سه صفر قرار دارد

$N = 0.000885$

پس:

$anti\log(-3.0531) = 0.000885$

مثال4: لوگاریتم اعداد زیر را محاسبه کنید.

$a)\ 2 \qquad b)\ 0.2 \qquad c)\ 0.02 \qquad d)\ 0.0002$

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \overline{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \overline{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \overline{4}.3010$

از مثال فوق، نتیجه گرفته می‌شود که مانتیس لوگاریتم یک عدد تنها مربوط به ترتیب ارقام است در این‌جا تمام اعداد، دارای عین مانتیس 0.3010 اند؛ بنابرآن موقعیت علامهٔ اعشاریه مانتیسای لوگاریتم را تغییر نمی‌دهیم.

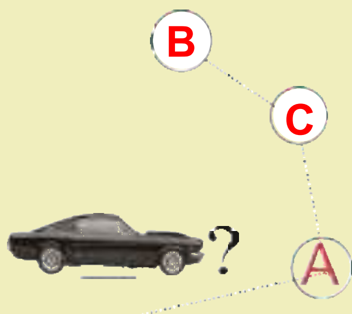


تمرین

$a)\ anti\log(-5.0521) \qquad b)\ anti\log 4.9479$

انترپولیشن خطی

Linear Interpolation



یک موتر تیز رفتار با سرعت متوسط در ظرف 30 دقیقه به شهر A و به همان سرعت در ظرف یک ونیم ساعت به شهر B می‌رسد. بگویید که با همان سرعت ثابت موتر فوق به شهر C که در بین شهر A و B واقع است، در چقدر وقت خواهد رسید؟

فعالیت

- اگر $\log A = a$, $\log B = b$ داده شده باشد و $\log C = c$ باشد طوری که $A < C < B$ است.
- لوگاریتم $\log C$ در کدام فاصلهٔ اعداد حقیقی قرار دارد؟
- به شکل تخمینی بگویید اگر a, b اعداد باهم نزدیک باشند؛ پس $\log \mathrm{C}$ در کجا واقع است؟
- قیمت‌های بین b و a را از روی وسط حسابی به دست آورید؟

از فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را می‌توان در یافت کرد.

نتیجه: عملیهٔ دریافت یک عدد نامعلومی که بین دو عدد معلوم واقع باشد به نام انترپولیشن خطی یاد می کنند.

هر گاه یک عدد پنج رقمی مانند عدد 1.2345 داشته باشیم نمی توانیم لوگاریتم آن را از جدول چهار رقمی دریافت کنیم؛ پس لوگاریتم این قسم اعداد در صورتی که جدول پنج رقمی نداشته باشیم توسط طریقهٔ انترپولیشن خطی دریافت کرده می‌توانیم.

مثال 1: $\log 5.235$ را دریافت کنید؟

حل: واضح است که این عدد در جدول لوگاریتم چهار رقمی وجود ندارد؛ اما می‌دانیم که عدد 5.235 بین اعداد 5.230 و 5.240 قرار داشته؛ که مانتیس آن‌ها در جدول وجود دارد.

طوری زیر دریافت می کنیم.

$\log 5.230 = 0.7185$

$\log 5.240 = 0.7193$

چون: $5.230 < 5.235 < 5.240$ می‌باشد. $\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$

پس: $0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$

هر گاه $\log 5.235 = x$ وضع شود در آن صورت داریم: $0.7185 < x < 0.7193$

تفاوت بین مانتیس‌های اعداد را در نظر می گیریم.

		اعداد	مانتیس		
0.010		5.240	0.7193		0.0008
	0.005	5.235	x	d	
		5.230	0.7185		

در طریقهٔ انترپولیشن خطی فرض می‌شود که این چهار عدد با هم متناسب اند؛یعنی:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.005}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.005 \cdot 0.0008}{0.010} \Rightarrow d \approx 0.0004$$

حا لا قیمت d را با مانتیس عدد کوچک جمع می کنیم در حقیقت لوگاریتم عدد 5,235 به دست می آید. $0.0004 + 0.7185 = 0.7189$

بدین ترتیب: $\log 5.235 = 07189$

مثال 2: $\log 0.0007957$ را دریافت کنید؟

حل: می‌دانیم که:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957 &= \log(7.957 \cdot 10^{-4})\\ &= \log 7.957 + \log 10^{-4}\\ &= \log 7.957 - 4\log 10\\ &= \log 7.957 - 4\end{aligned}$$

کرکترستیک آن 4- است.

عددی 7.957 در جدول لوگاریتم وجود ندارد؛ اما لوگـاریتم 7.95 و 7.96 را از جـدول دریافت می‌کنیم.

$$\log 7.96 = 0.9009$$

$$\log 7.95 = 0.9004$$

چـون: $7.960 > 7.957 > 7.950$ اسـت؛ پـس $\log 7.960 > \log 7.957 > \log 7.950$ هرگـاه بـا درنظرداشت $\log 7.957 = x$ لوگاریتم آن را توسط انترپولیشن خطی دریافت می‌نماییم.

اعداد   لوگاریتم‌ها

$$0.01\left[\begin{matrix} 7.96 & 0.9009 \\ 0.007\left[\begin{matrix} 7.957 & x \\ 7.950 & 0.9004 \end{matrix}\right]d \end{matrix}\right]0.0005$$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01}$$

$$d = 0.0005 \cdot \frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

حالا قیمت d را با مانتیس عدد کوچک جمع می‌کنیم.

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

در نتیجه مانتیس تخمینی لوگاریتم عدد 0.0007957 حاصل می‌شود.

$$\log 0.0007957 = 0.9008 - 4 = \bar{4}.9008$$

مثال 3: انتی لوگاریتم 4.5544 را دریافت کنید.

حل: هرگاه $x = anti\log 4.5544$ وضع شود، x را باید دریافت کرد. از رابطهٔ فوق، نتیجهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$= \log(t \cdot 10^4) \Rightarrow \log t + \log 10^4 = \log t + 4$$

مانتیس 0.5544 در جدول موجود نیست؛ اما مـانتیس‌هـای 0.5539 و 0.5551 در جـدول موجـود است و انتی لوگاریتم آن‌ها را دریافت و به کمک انترپولیشن قیمت x را دریافت می کنیم.

$$\begin{array}{l}\quad\quad\quad \text{اعداد} \quad\quad\quad\quad \text{مانتیس‌ها} \\ 0.01\left[\begin{array}{ll} 3.59 & 0.5551 \\ d\left[\begin{array}{l} t \\ 3.58 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} 0.5544 \\ 0.5539 \end{array}\right]0.0005 \end{array}\right]0.0012\end{array}$$

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d=0.01\cdot\frac{0.0005}{0.0012}=\frac{0,000005}{0,0012}=0,0041667$$

$$d=0,0042$$

برای دریافت t قیمت d را با عدد کوچک جمع می کنیم.

$$t=3.58+d=3.58+0.0042$$

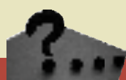
$$=3.5842$$

$$\log x=\log(3.5842\cdot 10^4)$$

$$\log x=\log 35842$$

وقتیکه لوگاریتم‌های دو عدد با هم مساوی باشند خود اعداد نیز با هم مساوی اند؛ پس:

$$x=35842$$



تمرین

در سؤالات داده شده اعداد x را دریافت کنید؟

$a)\ z=\log 0.001582$ $\quad\quad$ $b)\ x=\log 6.289$

معادلات اکسپوننشیل و لوگاریتمی

Exponential and logarithm equations

آیا تا به حال در بارۀ حل معادلات که به شکل $5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$ و $\log_2(x^2-1)=3$ باشند. فکر کرده اید؟ به کدام قیمت x معادلۀ فوق درست است و چطور می‌توانیم قیمت مجهول این قسم معادلات را دریافت کنیم ؟

$\log_2(x^2-1)=3$

$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$

تعریف

معادلاتی که که دارای توان مجهول باشند به نام معادلات اکسپوننشیل یاد می گردند. برای دریافت مجهول اگر توانستیم قاعده‌های هر دو طرف را با هم مساوی سازیم از قانون طاقت نما (اگر قاعده ها یا توان‌ها با هم مساوی باشند) استفاده می کنیم.

مثال 1: $2^{x-1}=32$

حل: قاعدۀ هر دو طرف معادلات را یکسان می‌سازیم.

$$2^{x-1}=2^5 \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

مثال 2: معادلۀ اکسپوننشیل $8^{3x-1}=2^4$ را حل و امتحان کنید؟

$$8^{3x-1}=2^4 \qquad \Rightarrow 2^{3(3x-1)}=2^4$$

حل: چون قاعده‌ها باهم مساوی اند بنابرآن توان‌ها نیز باهم مساوی می باشند.

$$3(3x-1)=4$$

$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$

$$9x=7 \qquad \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

امتحان:

$$8^{3\frac{7}{9}-1}=2^4 \Rightarrow 8^{\frac{7}{3}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}}=2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}}=2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4$$

$$\Rightarrow 2^4=2^4$$

فعالیت

- از معادلهٔ $(16)^{x+1} = 64^{x-2}$ قیمت x دریافت کنید؟

معادلات لوگاریتمی: افاده‌های لوگاریتمی که در آن مجهول موجود باشد به نام معادلات لوگاریتمی یاد می گردد و برای دریافت قیمت مجهول یک معادلهٔ لوگاریتمی، اول معادلهٔ داده شده را نظر به قوانین و قضایای لوگاریتم ساده ساخته ؛ سپس در مطابقت به قوانین الجبری و یا معادلات نمایی می‌توان قیمت مجهول را محاسبه کرد. مثال‌های زیر نمونه‌های از معادلات لوگاریتمی را نشان می‌دهد که در اثر قوانین مختلف قیمت مجهول محاسبه شده است:

مثال 1: از معادلهٔ لوگاریتمی زیر قیمت x را دریافت کنید: $\log_2(x^2-1)=3$

حل: به شکل نمایی می‌نویسیم:

$$\log_2(x^2-1)=3$$
$$x^2-1=2^3$$
$$x^2=1+8 \quad \Rightarrow \quad x^2=9$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x=\pm 3$$

مثال 2: قیمت x را از معادلهٔ $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ دریافت کنید.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$
$$x+2=9^2 \quad \Rightarrow \quad x+2=81$$
$$x=81-2=79 \quad \Rightarrow \quad x=79$$

مثال 3: قیمت x را از معادلهٔ $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ دریافت کنید

حل: با استفاده از ضرب و تقسیم لوگاریتم اعداد می‌توانیم بنویسیم.

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 \frac{3.5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

مثال 4: از معادلهٔ $\log_3(3^{2x}+2) = x+1$ قیمت x را دریافت کنید؟

حل: معادلهٔ فوق را به شکل طاقت می‌نویسیم:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Leftrightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

$$(3^x)^2 - 3.3^x + 2 = 0$$

$3^x = t$ قرار می‌دهیم:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$

$$t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3^x = 2 \Leftrightarrow x_2 = \log_3 2$$

مثال 5: از معادلهٔ $\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$ قیمت x را دریافت کنید؟

حل:

$$\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$$

$$\log(x^2+36) - \log(-x)^2 = 1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2} = 10$$

$$x^2 + 36 = 10x^2 \Rightarrow 10x^2 - x^2 - 36 = 0$$

$$9x^2 - 36 = 0$$

$$9x^2 = 36$$

$$x^2 = 4$$



تمرین

از معادلات نمایی و لوگاریتمی زیر قیمت x را دریافت کنید؟

$x_{12} = \pm 2, \qquad x_1 = 2, \qquad x_2 = -2$

$a)\ 11^{3x-1} = 11$

$b)\ 7^{2x-1} = 3^{x+3}$

$c)\ \sqrt{\log x} + 3 = 4$

$d)\ \log_5 \dfrac{x-1}{x-2} = 2$

استفاده از لوگاریتم در اجرای عملیه‌های ریاضی

آیا با استفاده از لوگاریتم عملیه‌هـای ریـا ضـی را انجا م داده می‌توانیم.

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{matrix}\right\}=?$$

دریافت حاصل ضرب توسط لوگاریتم

حاصل ضرب دو یا چند عدد را به کمک لوگاریتم؛ بنـابر قـانون $\log M\cdot N=\log M+\log N$ دریافت کرده می‌توانیم .

مثال: می‌خواهیم که حاصل ضرب $3.17\cdot 88.2$ را به کمک لوگاریتم دریافت کنیم.

حل: بنابر قانون ضرب نوشته کرده می‌توانیم.

$$\begin{aligned}\log(3.17\cdot 88.2)&=\log 3.17+\log 88.2\\ &=0.5011+1.9455=2.4466\end{aligned}$$

دیـده مـی‌شـود کـه مـانتیس 0.4466 درجـدول وجـود نـدارد؛ امـا در بـین مـانتیس های 0.4456 , 0.4472 قرار دارد.

از جدول دیده می‌شود:

$$anti\log 0.4472=2.80$$
$$anti\log 0.4456=2.79$$

فرق مانتیس‌ها

$$\begin{array}{c} \text{اعداد} \qquad \text{مانتیس} \\ 0.01\left[\begin{array}{ll} 2.79 & 0.4456 \\ d\left[\begin{array}{l} t \\ 2.80 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} 0.4466 \\ 0.4472 \end{array}\right]0.0006 \end{array}\right]0.0016 \end{array}$$

تناسب را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}$$

$$d=\frac{0.01\cdot 0.0006}{0.0016}=\frac{0.0006}{0.0016}=0.00375$$

$$t=2.79+0.00375=2.79375$$

$$\log x=\log(2.79375\cdot 10^{2})$$

$$x=279.375$$

$$anti\log 2.4466=279.375$$

$$3.17\cdot 88.2=279.375$$

آیا می‌دانید؟

برای ضرب دو یا چند عدد، نخست، حاصل جمع لوگاریتم‌های آن ها را حاصل می کنیم و سپس انتی لوگاریتم این حاصل جمع را که عبارت از حاصل ضرب است به دست می‌آوریم .



فعالیت

- حاصل ضرب زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید.

$$74.2\cdot 62.0=?$$

دریافت خارج قسمت ها به کمک لوگاریتم

با استفاده از قانون چهارم لوگاریتم $\log\frac{M}{N}=\log M-\log N$ ما می‌توانیم که خارج قسمت یک عملیهٔ تقسیم را حاصل کنیم.

مثال 1: می‌خواهیم که خارج قسمت $\frac{8750}{3.49}$ را به کمک لوگاریتم حاصل کنیم .

حل:

$$\log\frac{8750}{3.49}=\log 8750-\log 3.49$$

از جدول لوگاریتم داریم:

$$\log 8750=3.9420$$

$$\log 3.49=05428$$

$$\log 8750-\log 3.49=3.9420-0.5428=3.3992$$

در حالیکه $anti\log 3.3992 = 2507$ است؛ بنابر آن $\frac{8750}{3.49} = 2507.16$ می‌شود.



- حاصل تقسیم زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید:

$$\frac{374}{16,2}$$

آیا می‌دانید؟

جهت دریافت خارج قسمت دوعدد، نخست لوگاریتم مقسوم علیه را از لوگاریتم مقسوم تفریق کرده؛ سپس انتی لوگاریتم این فرق را که عبارت از خارج قسمت مطلوب است، حاصل می‌کنیم.

دریافت طاقت ها به کمک لوگاریتم

برای دریافت طاقت‌های که نماهای آن‌ها اعداد مثبت تام یا کسری باشند، از قانون سوم لوگاریتم استفاده می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم که قیمت $(1.05)^6$ را دریافت کنیم.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6\cdot(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بنابر آن

$$anti\log 0.1272 = 1.340$$

به یاد داشته باشید برای دریافت قیمت یک طاقت، نخست لوگاریتم قاعده را به نمای آن ضرب می‌کنیم. انتی لوگاریتم این حاصل ضرب، عبارت از قیمت طاقت است.



- لوگاریتم $? = (694)^{\frac{2}{3}}$



تمرین

1- حاصل ضرب‌های زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید:

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2- حاصل تقسیم‌های زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید:

$a)\dfrac{32.2}{25.1} = ?$ $\qquad$ $b)\dfrac{8}{737}$

3- با استفاده از لوگاریتم $(964)^{\frac{2}{3}}$ را ساده سازید:

نکات مهم فصل پنجم

تعریف: هرگاه a یک عدد مثبت و $a \neq 1$ باشد، $f(x) = a^x$ را به نام تابع اکسپوننشیل به قاعدهٔ a می‌نامند.

خواص توابع اکسپوننشیل

با استفاده از معلومات قبلی خواص توابع اکسپوننشیل را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

- در هر تابع اکسپوننشیل ناحیهٔ تعریف اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌ها اعداد حقیقی مثبت است.
- قسمی که ناحیهٔ تعریف هر تابع اکسپوننشیل برای هر x , $f(x) > 0$ است.
- هر تابع اکسپوننشیل تابع یک به یک(injective) است، یعنی برای هر $x_1 \neq x_2$ همیشه $f(x_1) \neq f(x_2)$
- هر تابع اکسپوننشیل برای $a > 1$ متزاید و برای $a < 1$ متناقص است.
- گراف هر تابع اکسپوننشیل از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد.
- گراف‌های توابع اکسپوننشیل $f(x) = a^x$, $g(x) = a^{-x}$ نظر به محور y متناظر اند.

لوگاریتم

تعریف: لوگاریتم عبارت از طرز ارائهٔ نوع دیگر از طاقت می‌باشد و یا این‌که محاسبهٔ توان مجهول را به‌نام لوگاریتم یاد می‌کنند. $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$

تابع لوگاریتمی: معکوس تابع اکسپوننشیل به نام تابع لوگاریتمی یاد می‌شود.

خواص تابع لوگاریتمی

1- ساحهٔ قیمت‌های تابع لوگاریتمی ست اعداد حقیقی مثبت می‌باشد.

2- قسمی که $\log_a 1 = 0$ است برای هر قاعده اختیاری می‌باشد؛ پس به این اساس تابع لوگاریتمی تنها یک جذر حقیقی $x_0 = 1$ دارد. بدین ترتیب، گراف تابع لوگاریتمی در سیستم مختصات قایم از نقطهٔ (1.0) می‌گذرد.

3- هر تابع لوگاریتمی تابع یک به یک است، یعنی برای هر $x_1 \neq x_2$ همیشه $f(x_1) \neq f(x_2)$ است.

4- گراف‌های توابع لوگاریتمی $f(x) = \log_a x$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ نظر به محور x متناظر اند.

انواع لوگاریتم

لوگاریتم معمولی(عام): لوگاریتمی که قاعدهٔ آن عدد 10 باشد به نام لوگاریتم عام یا Briggs system نامیده می‌شود، که به سمبول log نمایش داده می‌شود.

لوگاریتم طبیعی

لوگاریتمی که قاعدهٔ آن e است به نام لوگاریتم طبیعی یاد گردیده و طور زیر نشان داده می‌شود.

$\log_e x = \ln x$

قوانین لوگاریتم

قانون اول: $\log_a a = 1$

قانون دوم: $\log_a 1 = 0$

قانون سوم: $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

قانون چهارم: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

قانون پنجم: $\log_a x^n = n \log_a x$

قانون ششم: $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$

قانون هفتم: $\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$

قانون هشتم: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

کرکترستیک و مانتیس

کرکترستیک: هرگاه $\log x = n + \log s \quad , 1 \le S < 10$ باشد n یک عدد تام که به نام مشخصه یا کرکترستیک یاد می‌شود که از روی خود عدد تعیین می‌شود.

مانتیس: قسمت اعشاری (logs) به نام مانتیسا یاد می‌شود که از روی جدول تعیین می گردد. مانتیس یک عددی مثبت بین صفر ویک قرار دارد.

انتی لوگاریتم: هرگاه $\log_a y = x$ باشد؛پس y را به نام انتی لوگاریتم x می‌نامند؛ یعنی: $y = anti \log x$

انترپولیشن خطی: اگر یک عدد نامعلوم بین دو عدد معلوم واقع باشد به کمک آن اعداد معلوم می‌توان عدد نامعلوم را دریافت کرد. در این صورت این طریقه به نام انترپولیشن خطی یاد می‌شود.

معادلات نمایی و لوگاریتمی

معادلات نمایی: معادلهٔ که دارای نمایی مجهول باشد به نام معادلهٔ نمایی یاد می گردد. برای دریافت مجهول از قوانین طاقت ها استفاده می کنیم.

معادلات لوگاریتمی: افاده‌های لوگاریتمی که در آن مجهول موجود باشد به نام معادلات لوگاریتمی یاد می گردد.

عملیه‌های ریاضی به کمک لوگاریتم

- دریافت حاصل ضرب به کمک لوگاریتم
- دریافت حاصل تقسیم به کمک لوگاریتم
- دریافت طاقت به کمک لوگاریتم



تمرین فصل پنجم

سؤالات زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1- عدد لوگاریتمی $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوی است به:

$a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ 3$ $d)\ -3$

2- در رابطهٔ $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ قیمت b عبارت است از:

$a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ 81$ $c)\ \sqrt{81}$ $d)\ -4$

3- قیمت افادهٔ $\log_3 81 - \log 0{,}01 = ?$ عبارت است از:

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 6$ $d)\ 9$

4- قیمت x در معادلهٔ $\log 18 - \log 2x = \log 3$ مساوی است به:

$a)\ 2$ $b)\ 3$ $c)\ 4$ $d)\ 13.5$

5- $\log_2 16 = ?$ عبارت است است:

$a)\ 4$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ -4$

6- $\log_{\frac{1}{5}} 125$ عبارت است از:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

7- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ عبارت است از:

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

8- قیمت x در معادلهٔ $3^{x-1} = 9$ عبارت است از:

$a)\ x=-3$ $b)\ x=9$ $c)\ x=-9$ $d)\ x=3$

9- مشخصهٔ $\log 234{,}21$ عبارت است از:

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ 3$

10- معکوس لوگاریتم یک عدد، مساوی است به:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $b)\ \log_a m \frac{1}{\log_a m}$ $c)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $d)$ هیچ کدام

سؤالات زیر را حل کنید؟

1- در معادلات زیر قیمت x را دریافت کنید:

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $\qquad b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $\qquad d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $\qquad f)\ \log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2 - \log 20$ $\qquad h)\ \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

2- افاده‌های لوگاریتمی زیر را با استفاده از قوانین لوگاریتم ساده سازید:

$a)\log_3(12x^2) - \log_3(8x^3y^2) + \log_3(2xy^2) = ?$

$b)\log_5(\frac{4ab}{x}) + \log_5(\frac{x}{100ab})b = ?$

$c)\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4^3\sqrt{2}} = ?$

1- لوگاریتم‌های زیر را محاسبه کنید:

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $\qquad b)\log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\qquad d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $\qquad e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0,1} = ?$

2- انتی لوگاریتم‌های زیر را دریافت کنید:

$a)\ 1.7300$ $\qquad b)\ 0.8954$ $\qquad c)\ 4.5682$ $\qquad d)\ \bar{2}.1987$

3- لوگاریتم هر یک از اعداد زیر را دریافت کنید:

$a)\ 89500$ $\qquad b)\ 91$ $\qquad c)\ 65.3$ $\qquad d)\ \log 0.002$

4- به کمک لوگاریتم، حاصل ضرب اعداد زیر را محاسبه کنید:

$a)\ 2,01\cdot 52\cdot 99$ $\qquad b)\ (0,0062)\cdot(-34,8)$

5- خارج قسمت‌های داده شدهٔ زیر را با استفاده از لوگاریتم دریافت کنید:

$a)\ 0.888 \div 256$ $\qquad b)\ 17.3 \div 7.47$

6- هر یک از افاده‌های زیر را به کمک لوگاریتم دریافت کنید:

$a)\ (7.42)^3$ $\qquad b)\ (-84.7)^2$ $\qquad c)\ \sqrt{418}$ $\qquad d)\ \sqrt{0.21}$

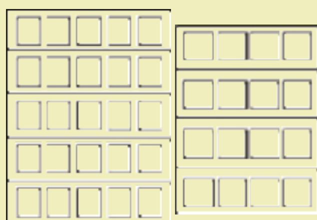
جدول لوگاریتم که مانتیس آن، چهار رقم اعشاری دارد

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	3900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

فصل ششم
متریکس‌ها

متریکس‌ها
Matrixes



تصویر ساختمان چند طبقه‌یی را درنظر گرفته هر ساختمان چند طبقه دارد بشمارید در شکل مقابل می‌توانیم کلکین‌های تعمیر بزرگ را بشماریم $(5\cdot 5 = 25)$ تعداد کلکین‌ها و تعداد طبقه‌های تعمیر کوچک را بشمارید.

فعالیت

- در سیستم مختصات قایم نقطهٔ $M(x,y)$ را تعیین کنید.
- متناظر نقطهٔ $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ را نظر به محور x تعیین کنید.
- رابطهٔ فوق را به شکل ضرایب بنویسید.
- تمام مراحل فعالیت فوق را برای نقاط P و متناظر آن P' نظر به محور y و S, S' (متناظر آن) نظر به مبدأ کمیات وضعیه انجام دهید.

بعد از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر را می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

به این مفهوم است که نقطهٔ M به وسیلهٔ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ به نقطه M' تبدیل یافته است.

می‌دانید که هر کدام از $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ نمایش مستوی یک نقطه در مستوی کمیات وضعیه هستند.

اما جدول $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ یک وسیلهٔ جدید است که برای اولین مرتبه به آن رو به رو می‌شوید. به همین ترتیب $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & +1\end{pmatrix}$ هر یک از نقاط P',P و S',S یک وسیلهٔ تبدیل نقاط است.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعریف: هرگاه دسته‌یی از اعداد یا اشیا به شکل سطری و ستونی دریک جدول مستطیلی قرار داده شود. به نام متریکس Matrix یاد می‌شود.

هر یک از اعداد، عنصر متریکس نامیده می‌شود. حروف بزرگ C,B,A ... را برای نمایش متریکس وحروف کوچک، برای نمایش عناصر شامل متریکس به کار برده می‌شود.

هر کدام از جدول اعداد در زیر یک متریکس را مشخص می کند.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

سطر اول، سطر دوم، سطر سوم — ستون اول، ستون دوم، ستون سوم

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

سطر اول، سطر دوم، سطر سوم — ستون

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix}$$

سطر

به طور کلی اگر a عنصری واقع سطر i ام و ستون j ام یک متریکس باشد آن را به شکل a_{iJ} نشان می‌دهیم که i ، j اعداد طبیعی بوده و به ترتیب مشخص کنندهٔ شمارهٔ سطر و ستون می‌باشند. $i=1,2,3\ldots \;,\; j=1,2,3\ldots$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$

مرتبه یا درجهٔ یک متریکس

اگر تعداد سطرهای متریکس A ، مساوی به m و تعداد ستون‌های آن مساوی به n باشد می‌گوییم A متریکس از مرتبه $(m\times n)$ و خوانده می‌شود m در n است و می‌نویسیم: $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ تعداد سطر و ستون هر متریکس را مرتبه یا اندازهٔ آن گویند.

فعالیت

- مرتبه هر یک از متریکس‌های زیر را تعیین کنید.

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

توجه کنید اگر A متریکسی با یک سطر ویک ستون باشد؛ یعنـی $(x)_{1\times 1}$ آن‌گاه متـریکس A بـه عدد داخل اش مساوی است.

مثال: متریکس‌های زیر را به صورت جدول مستطیلی بنویسید.

$a)\ (a_{ij})_{2\times 2}=(i+j)_{2\times 2} \qquad b)\ (a_{ij})_{3\times 2}=(i\cdot j)_{3\times 2}$

حل: بـرای حـل هـر یـک از مثـال‌هـای بـالا نخسـت صـورت عـمـومی متـریکس خواسـته شـده را می‌نویسیم، صورت عمومی متریکس جزء a یک متریکس 2×2 است؛ یعنی:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ \ a_{12}=1+2=3\ \ ,\ \ a_{21}=2+1=3\ \ ,\ \ a_{22}=2+2=4$

در نتیجه، متریکس خواسته شده عبارت است از: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

جزء b) شکل عمومی متریکس 3×2 است، یعنی 3 سطر و 2 ستون دارد؛یعنی:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot 1=1\ ,\ \ a_{21}=2\cdot 1=2\ \ ,\ \ a_{31}=3\cdot 1=3$

$a_{12}=1\cdot 2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot 2=4\ \ ,\ \ a_{32}=3\cdot 2=6$

در نتیجه متریکس خواسته شده عبارت است از: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

دو متریکس هم مرتبه را زمانی مساوی گویند که عناصر آن یک به یک مساوی باشند.

مثال: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ این دو متریکس وقتی مساوی می‌شوند که $a=-1$ و $b=2$ باشند.

آیا دو متریکس $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ باهم مساوی اند یا نه ؟ چرا ؟



تمرین

1 – مرتبهٔ متریکس‌های زیر را بنویسید:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2 – متریکس‌های زیرا را به شکل جدول مستطیلی بنویسید:

$a)\ (2i+3j)_{3\times 3}$ $\qquad$ $b)\ \left(\frac{i}{j}\right)_{3\times 3}$

انواع متریکس‌ها

متریکس‌های شکل مقابل چند سطر و چند ستون دارند؟

آیا تمام عناصر متریکس صفر شده می‌تواند؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 – متریکس سطری Row Matrix: متریکسی که تنها دارای یک سطر باشد، آن را متریکس سطری گویند؛ طور مثال $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}_{1\times 4}$

2 – متریکس ستونی Column Matrix: متریکس که تنها دارای یک ستون باشد آن را متریکس ستونی گویند؛ طور مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

3 – متریکس صفری Zero Matrix: متریکسی که تمام عناصر آن صفر باشد، آن را متریکس صفری نامیده و به سمبول $0_{m\times n}$ نمایش می‌دهند.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4} \quad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4 – متریکس مربعی (square Matrix): هرگاه در متریکس مانند A تعداد سطر ها و ستون ها مساوی باشند $(m=n)$ متریکس را مربعی گویند؛ طور مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

هر متریکس مربعی دارای دو قطر می‌باشد، قطری که عناصر آن $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ باشد قطر اصلی Main Diagonal و قطری که عناصر آن $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$ باشد، قطر فرعی Minion Diagonal می‌نامند.

قطر فرعی　　　　قطر اصلی

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n} & \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

قطر اصلی　　　　قطر فرعی

فعالیت

- متریکس‌هایی را بنویسید که مرتبهٔ آن‌ها 3×1 ، 1×4 باشند، چه نوع متریکس‌ها استند؟

5: متریکس قطری Diagonal Matrix: متریکسی که تمام عناصر آن به غیر از قطر اصلی مساوی به صفر باشند به نام متریکس قطری یاد می‌شود؛ مانند:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

6 – متریکس سکالر Scalar Matrix: هر متریکس قطری که عناصر قطر اصلی آن مساوی باشند، متریکس سکالر می گویند؛ مانند:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & K & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & K\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots & K \end{pmatrix}_{n\times n}$$

به طور مثال: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ دیده می‌شود که $K=8$ است.

7 – متریکس واحد Unit Matrix: اگر در یک متریکس سکالر یا متریکس قطری عناصر قطر اصلی عدد یک باشند؛ آن‌گاه متریکس را متریکس واحد گفته و به I نشان می‌دهیم.

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & 1\ldots0 \\ 0 & 0 & 0\ldots1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- یک متریکس 3×3 را بنویسید که عناصر تحت قطر اصلی مساوی به صفر باشند.
- به همین ترتیب یک متریکس 3×3 بنویسید که تمام عناصر بالایی قطر اصلی مساوی به صفر باشند.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

1- اگر دریک متریکس مربعی که تمام عناصر بالای قطر اصلی یا پایان قطر اصلی صفر باشند در این صورت متریکس مذکور به نام متریکس مثلثی Triangular Matrix یاد می‌شود.

اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی صفر باشند به نام متریکس مثلثی بالایی یا Upper Triangular Matrix و اگر تمام عناصر تحت قطر اصلی صفر باشند به نام متریکس مثلثی پایانی یا Lower Triangular Matrix یاد می‌شوند.

در مثال‌های زیر A یک متریکس مثلثی بالایی و متریکس B یک متریکس مثلثی پایانی است.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) یک متریکس: متضاد متریکس A را به $(-A)$ نشان داده و متریکسی است که هر عنصر آن متضاد عناصر متناظرش در A می‌باشد. اگر $A=|a_{ij}|_{m\times n}$ یک متریکس باشد. آن‌گاه متضاد آن، یعنی $(-A)$به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\Rightarrow -A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

مانند مثال زیر:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$



تمرین

متریکس‌های زیر را در نظر گرفته مرتبه و نام‌های مربوط آن‌را مشخص کنید؟

$a)\ A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b)\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c)\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d)\ D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $e)\ E=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $f)\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$g)\ G=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h)\ H=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

جمع و تفریق متریکس‌ها

Addition and subtraction of Matrix

در بارهٔ جمع و تفریق متریکس‌های زیر در صورت امکان چه گفته می‌توانید.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1 – جمع متریکس‌ها

هرگاه $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دو متریکس باشد، پس $A+B=C$ عبارت از یک متریکسی است که عنصر C_{iJ} آن حاصل جمع a_{ij} و b_{ij} می‌باشد، یعنی جمع دو متریکس تنها در صورتی ممکن است که هر دو متریکس دارای مرتبهٔ مساوی باشند؛ چون C_{ij} حاصل جمع دو عدد حقیقی است.

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2 – تفریق متریکس‌ها

مشابه جمع متریکس‌ها، می‌توانیم تفاضل دو متریکس را به دست آوریم.

اگر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$ باشد، حاصل تفریق را طور زیر بدست می‌آوریم.

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}C_{m\times n}$$

فعالیت

- اگر $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ باشند. $A-B$ را به دست آرید.

خواص جمع وتفریق متریکس‌ها

1- جمع متریکس‌ها دارای خاصیت تبدیلی است، اما تفریق متریکس ها دارای خاصیت تبدیلی نیست

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2- جمع وتفر یق متریکس‌ها دارای خاصیت اتحادی است. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3- عنصر عینیت (Identity Element) در جمع متریکس‌ها صدق می‌کند اما در تفریق متریکس‌ها صدق نمی‌کند. $A+0=0+A=A$

مثال1: اگر $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ داده شده باشد. $A-B=?$

حل: چون مرتبهٔ هر متریکس با هم مساوی اند، پس می‌توانیم تفاضل دو متریکس را به دست بیاوریم.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- توسط یک مثال نشان دهید که $A-B\neq B-A$ است.

مثال2: درصورت امکان، اگر $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ باشد. $A+B$ و $A-B$ را به دست آورید.

حل: دیده می‌شود که متریکس‌های A و B دارای مرتبهٔ یکسان نبوده؛ بنابراین جمع و تفریق آن امکان ندارد؛ زیرا متریکس A دارای مرتبهٔ 3×2 و متریکس B دارای مرتبهٔ 2×3 می‌باشد.

تمرین

در صورت امکان متریکس‌های زیر را جمع و تفریق نمایید.

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

ضرب یک متریکس در سکالر

ما قاعدۀ جمع و تفریق متریکس‌ها را دیدیم؛ اگر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یک متریکس و K یک سکالر باشد. برای حاصل ضرب آن، چه فکر می کنید ؟

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- اگر $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یک متریکس و K یک سکالر باشد، حاصل ضرب KA را به دست آورید.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, KA=\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- متریکس $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ به کدام عدد ضرب شود. تا حاصل ضرب آن یک متریکس واحد شود.
- بعد از انجام فعالیت فوق می‌توان تعریف زیر را بیان کرد.

تعریف: اگر $A=(a_{ij})$ یک متریکس و $K\in IR$ یک عدد باشد، پس حاصل ضرب KA عبارت از متریکس C است، طوری که عنصر c_{ij} آن حاصل ضرب K در a_{ij} است.

$c_{ij}=K(a_{ij})$

مثال: اگر $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $K=2$ باشد، حاصل ضرب KA رادریافت کنید؟

حل:

$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 3\cdot 2 & 6\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 1\cdot 2 & 0\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & 0\cdot 2 & -1\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

خواص ضرب متریکس در سکالر (عدد حقیقی)

اگر A و B دو متریکس هم مرتبه، α و β دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+A\beta$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

مثال: اگر $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ شده باشد، نشان دهید $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$ می‌شود.

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot3 & 6\cdot2\\ -3\cdot2 & 9\cdot2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)A=(3\cdot2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\cdot3 & 6\cdot6\\ -3\cdot6 & 9\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot3 & 3\cdot6\\ -3\cdot3 & 9\cdot3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & -27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$



تمرین

1 – اگر $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ و $\beta=1$ داده شده باشند 3 خواص ضرب متریکس در سکالر را نشان دهید.

2 – اگر $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ و $K=3$ باشد KA و $\frac{1}{K}A$ را دریافت کنید.

ضرب دو متریکس

Multiplication of two Matrixes

آیا برای ضرب دو متریکس کدام نظر داده می‌توانید؟

شما برای دو متریکس A و B دیدید که $A+B=B+A$ برای ضرب متریکس‌ها چه فکر می‌کنید؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

تعریف

دو متریکس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{n\times p}$ را در نظر بگیرید. برای این‌که دو متریکس قابل ضرب شدن در یکدیگر باشند باید تعداد ستون‌های متریکس اول با تعداد سطرهای متریکس دوم برابر باشد. متریکس حاصل ضرب، متریکسی است؛ مانند. $C=(a_{ij})_{m\times p}$ که تعداد سطرهای آن برابر تعداد سطرهای متریکس اول و تعداد ستون ها برابر تعداد ستون‌های متریکس دوم است.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

برای ضرب دو متریکس بدین صورت عمل می‌کنیم: مجموع حاصل ضرب عناصر سطر اول متریکس اول در ستون‌های متریکس دوم، عناصر سطر اول متریکس حاصل ضرب را تعیین می‌کند. مجموع حاصل ضرب عناصر سطر دوم متریکس اول در ستون‌های متریکس دوم، عناصر سطر دوم متریکس حاصل ضرب را تشکیل می‌دهد. با تکرار این عمل برای تمامی سطرها و ستون دو متریکس، متریکس حاصل ضرب محاسبه می‌شود. این مطلب را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

مثال 1: اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ داده شده باشند؛ پس $A\times B$ را دریافت کنید.

حل: از روی تعریف متریکس ما داریم:

مرحله دوم
مرحله اول

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot\ \ -1\\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0\\-1+0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

در مرحلهٔ اول، تمام عناصر سطر اول را ضرب عناصر ستون می‌کنیم.

در مرحلهٔ دوم تمام عناصر سطر دوم را ضرب عناصر ستون می‌کنیم.

مثال 2: اگر $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ داده شده باشند. حاصل ضرب $A\cdot B$ را دریابید.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\ (-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\ -2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

مثال 3: اگر $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$ داده شده باشد؛ پس $A\cdot B$ را دریافت کنید.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\ 5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\ 15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\ 27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

فعالیت

• اگر $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ باشند، در صورت امکان AB و BA را دریافت و با هم مقایسه کنید.

مثال 4: اگر $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ باشند CD و DC را دریافت و باهم مقایسه کنید.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot4+(-1)(-3)\\ 1\cdot(-3)+2(-4) & 1\cdot4+2\cdot(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & 3+4\cdot2\\ -4\cdot2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

دیده می‌شود که $CD=DC$ است.

خواص ضرب متریکس

خاصیت 1: ضرب دو متریکس به صورت عمومی دارای خاصیت تبدیلی نیست، یعنی اگر A و B دو متریکس باشند $AB\neq BA$

خاصیت 2: ضرب متریکس‌ها دارای خاصیت اتحادی اند. اگر A , B و C متریکس‌ها باشند طوری‌که حاصل ضرب مطلوب باشند؛ پس داریم: $(AB)C=A(BC)$

خاصیت 3: ضرب متریکس‌ها دارای خاصیت توزیعی برای ضرب بالای جمع می‌باشد؛ پس داریم:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ \ K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$



تمرین

حاصل ضرب متریکس‌های زیر را به دست آورید:

$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$

$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$

$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$

ترانسپوز یک متریکس

Transpose of a Matrix

اگر دریک متریکس جاهای سطرها و ستون‌های آن‌را تبدیل نماییم متریکس جدید که به وجود می‌آید به نام چه یاد می‌شود؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- متریکس $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 3 & 1\\-1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ را در نظر گرفته جاهای سطر و ستون آن را تغییر داده متریکس جدیدی را که به دست می‌آید بنویسید.
- هرگاه جاهای سطر و ستون یک متریکس را تغییر دهیم متریکس جدیدی که به وجود می‌آید با متریکس اولی مساوی است؟ متریکس جدید را چه می‌نامند.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف: هرگاه یک متریکس مربعی $(m\times n)$ موجود باشد، اگر سطر به ستون و ستون به سطر تبدیل شوند متریکس جدیدی که به دست می‌آید به نام متریکس ترانسپوز یاد می‌شود.

متریکس ترانسپوز A به A^T نشان داده می‌شود. مرتبه متریکس ترانسپوز $n\times m$ است.

مثلاً: هرگاه $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times3}$ باشد؛ پس $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\\3 & 4\end{pmatrix}_{3\times2}$ متریکس ترانسپوز آن است. اگر یک متریکس ترانسپوز، یعنی A^T با متریکس خود یعنی A مساوی باشد، این متریکس به‌نام متریکس متناظر Symmetric Matrix یاد می‌شود؛ مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\4 & 2 & 3\\5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یک متریکس متناظر است؛ زیرا:

$$A^T=A\Rightarrow=A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\4 & 2 & 3\\5 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

تشخیص متریکس‌های متناظر: درمتریکس‌های متناظر عناصر آن نظر به قطر اصلی مساوی و متناظر اند.

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\b & c & f\\c & f & d\end{pmatrix}$$

خواص متریکس ترانسپوز

خاصیت اول: ترانسپوز یک متریکس ترانسپوز، با خود آن متریکس مساوی است.

$A = a_{ij} \Rightarrow (A^T) = (a_{ji})$ است بنا برآن: $(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = a_{ij} = A$

خاصیت دوم: مجموع حاصل جمع و حاصل تفریق دو متریکس ترانسپوز مساوی است به حاصل جمع و حاصل تفریق ترانسپوز هر متریکس

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

و یا به صورت عموم

$$(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$$

خاصیت سوم: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

خاصیت چهارم: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad \alpha \in IR$

$$(-A)^T = -A^T$$

فعالیت: اگر $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ داده شده باشد نشان دهید که:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: ترانسپوز متریکس‌های زیر را به دست آورید.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$



تمرین

1- متریکس‌های A و B را درنظر گرفته متریکس‌های ترانسپوز آن را دریافت کنید.

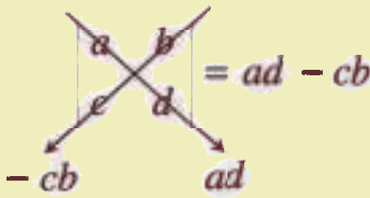
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2 – در متریکس‌های فوق برای عدد حقیقی 3، صحت 4 خاصیت فوق را نشان دهید.

دیترمینانت

Determinant

در مثال عددی، یک متریکس مربعی را طوری تعیین کنید که حاصل تفریق $ad-cb$ مساوی به صفر گردد.



تعریف

اگر یک متریکس A به عدد حقیقی نسبت داده شود به نام دیترمینانت متریکس A یاد می‌شود.

دیترمینانت متریکس $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ را به یکی از شکل‌های |A| یا detA و یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ نشان می‌دهند.

به همین ترتیب اگر یک متریکس $n\times n$ داشته باشیم که دارای n سطر و n ستون باشد دیترمینانت از درجهٔ n نامیده می‌شود. متریکس مربع $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ را درنظر گرفته طبق تعریف خواهیم داشت.

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

محاسبهٔ دیترمینانت متریکس‌های 2×2

دیترمینانت متریکس $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: دیترمینانت متریکس $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ را محاسبه کنید.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- دیترمینانت متریکس $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ را محاسبه کنید.

محاسبه دیترمینانت متریکس‌های 3×3: دیترمینانت متریکس $A_{3\times3}$ را درنظر می گیریم:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

حل: برای محاسبهٔ دیترمینانت A مراحل زیر را درنظر می گیریم.

مرحلهٔ اول: ستون اول وسطر سوم را حذف می کنیم دیترمینانت 2×2 را محاسبه و ضرب عنصر تقاطع سطر سوم و ستون اول می کنیم.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

مرحلهٔ دوم: ستون دوم وسطر سوم را حذف می کنیم، دیترمینانت 2×2 را با تغییر علامت محاسبه و ضرب عنصر تقاطع ستون دوم و سطر سوم می‌نماییم.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23} - a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

مرحلهٔ سوم: ستون سوم و سطر سوم را حذف، دیترمینانت 2×2 را محاسبه و ضرب عنصر تقاطع ستون سوم وسطر سوم می‌نماییم.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

مرحلهٔ چهارم: تمام مراحل 1 , 2 , 3 را باهم جمع نموده به این ترتیب، قیمت عددی دیترمینانت A بـه دست می‌آید.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})\,a_{31} - (a_{11}\,a_{23} - a_{21}\,a_{13})\,a_{32} + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$= a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

مثال: مقدار دیترمینانت زیر را محاسبه کنید. $B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

حل:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$



فعالیت

- دیترمینانت $A=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

روش دوم: محاسبهٔ دیترمینانت به روش ساروس: در این روش دو ستون اول دیترمینانت را درسمت راست آن به صورت زیر تکرار می‌کنیم:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

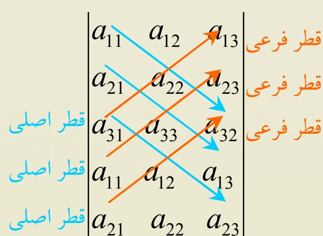
قطر های فرعی

قطرهای اصلی

عناصر قطر اصلی را باهم ضرب و جمع می‌کنیم، به همین ترتیب، عناصر قطر فرعی را باهم جمع و ضرب و بعد جمع می‌نماییم از حاصل ضرب مجموع عناصر قطر اصلی، قطر فرعی را تفریق می‌کنیم، به این ترتیب مقدار دیترمینانت متریکس A به دست می‌آید:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

در این روش به جای استفاده از ستون اول و دوم می‌توانیم از دو سطر اول و دوم استفاده کنیم به این ترتیب که آن‌ها را در زیر دیترمینانت تکرار کرده مانند فوق عمل می‌کنیم.



مثال 2: دیترمینانت زیر را به روش ساروس به دست آورید:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|M|=\left|\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

حل: $=\big(3\cdot 3\cdot 6+2\cdot 0\cdot 5+(-1)(-4)(-2)\big)-\big((-1)\cdot 3\cdot 5+3\cdot 0(-2)+2(-4)\cdot 6\big)$

$=(54+0-8)-(-15+0-48)=46+63=109$

فعالیت

- دیترمنانت $|A|$ را به روش ساروس به دست آورید. $|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

تمرین

1- مقدار دیترمینانت‌های زیر را به شکل مختصر محاسبه کنید.

$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

$c)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ $\qquad d)\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2- مقدار دیترمینانت‌های زیر را به طریق ساروس محاسبه کنید.

$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

خواص دیترمینانت

اگر در یک دیترمینانت جای‌های سطر یا ستون را تغییر دهیم در قیمت دیترمینانت چه تغییر می‌آید؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعالیت

- دیترمینانت $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ و $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.
- دیترمینانت $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ را درنظر گرفته ترانسپوزآن $|A^T|$ را به دست آورده نشان دهید
- از فعالیت بالا نتیجه زیر به دست می‌آید.که $|A^T|=|A|$

هرگاه A یک متریکس $n\times m$ باشد، برای دیترمینانت $|A|$ خواص زیر صحت دارد.

1- هرگاه تمام عناصر یک سطر یا ستون متریکس $|A|_{n\times m}$ مساوی صفر باشد.

آن‌گاه دیترمنانت A مساوی به صفر است.
$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

2 – هرگاه دو سطر یا دو ستون متریکس $|A|_{mxn}$ یکسان و یا متناسب باشند دیترمینانت A مساوی به صفر است.
$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3 –اگر عناصر یک سطر یا ستون متریکس A_{nxn} مضربی از عناصر سطر یاستون دیگر باشند.

آن‌گاه $|A|=0$ است.
$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4- دیترمینانت $|A|$ و $|A^T|$ باهم مساوی اند. به همین ترتیب، خواص دیگر هم در دیترمینانت وجود دارد.

هرگاه دریک دیترمینانت جای دو سطر یا دو ستون متوالی وغیر متوالی را بایکدیگر عوض کنیم، علامت دیترمینانت تغییر می کند.

مثال 1: دیترمینانت $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ را در نظر می گیریم.

حل: ستون دوم را به جای ستون اول و ستون اول را به جای ستون دوم قرار می‌دهیم.

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

دیده می‌شود که در دیترمینات A جاهای ستون اول با ستون دوم تبدیل شده است، همین طور می‌توانیم جای دو سطر را نیز با هم تبدیل کنیم، در آخر به دست می‌آید: $|A|=-|B|$

اگر عدد ثابتی مانند k در یک دیترمنات ضرب شود، این عدد تنها در یک سطر یا یک ستون دلخواه دیترمنانت ضرب خواهد شد. به همین ترتیب، می‌توانیم در یک دیترمینانت از عامل مشترک دریک سطر یا یک ستون دلخواه فکتور مشترک گرفت.

مثال 2: عامل ضربی مشترک دیترمینانت $|A|$ را پیدا کنید. $A=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$

حل: مشاهده می‌شود که در ستون اول دیترمینانت عدد 4 عامل ضربی مشترک است . در حقیقت این عدد عامل ضربی مشترک دیترمینانت است.

$$|A|=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$



تمرین

به کمک خواص دیترمینانت قیمت دیترمینانت‌های زیر را به دست آورید:

$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ $b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $c)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

معکوس ضربی متریکس‌های 2×2

Multiplicative Inverse of 2×2 Matrix

آیا قاعدهٔ ضرب اعداد حقیقی را به یاد دارید؟

به همین ترتیب برای برخی متریکس‌های مربعی نیزاین خاصیت با درنظر داشت خواص متریکس‌ها وجود دارد.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



- متریکس $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ را درنظر گرفته دیترمنانت آن را محاسبه کنید.
- متریکس $B=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ را با متریکس A ضرب کنید نتیجهٔ آن را بنویسید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف: متریکس مربعی $A=(a_{iJ})_{n\times n}$ را درنظر گرفته، اگر متریکس مربعی B وجود داشته باشد؛ طوریکه: $AB=BA=I_n$

در این صورت B را معکوس ضربی متریکس A گویند و آن را به شکل A^{-1} نشان می‌دهند؛ بنابرآن خواهیم داشت. $A\,A^{-1}=A^{-1}\,A=I_n$

به یاد داشته باشید: متریکس مربعی A را (singular) گویند هرگاه $|A|=0$ باشد وغیر منفرد non − singular یا منظم گویند، هرگاه $|A|\neq 0$ باشد؛ بنابرآن برای معکوس پذیر بودن یک متریکس باید دوشرط بر قرار باشد.

اول متریکس مربعی باشد ودوم دیترمنانت آن خلاف صفر باشد.

مثال 1: نشان دهید که $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ معکوس یکدیگر است؟

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)\ (-7)+3(-2) & (-1)\ (-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)\ (-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دیده می‌شود. $AB=BA=I$ موجود است، پس گفته می‌توانیم A و B معکوس یکدیگر اند.

متوصلهٔ (الحاقی) یک متریکس Ad joint of Matrix: برای دریافت متریکس متوصله یا الحاقی مرتبه و جاهای سطر و ستون قطر اصلی را تغییر داده و عناصر قطر فرعی را با تغییر علامت می‌نویسیم متریکس جدید که به دست می‌آید عبارت از متریکس الحاقی یا Ad joint = Adj می‌نامند؛ طور مثال:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

در هر متریکس $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که دیترمنانت آن خلاف صفر باشد. $|A|\neq 0$؛ بنابراین متریکس معکوس پذیر از روی فارومول زیر معکوس متریکس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

مثال 1: اگر $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ یک متریکس 2×2 باشد معکوس ضربی متریکس آن را دریابید:

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=8\neq 0$$

چون دیترمنانت آن خلاف است؛ بنابراین متریکس معکوس پذیر است.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

امتحان:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

به صورت عموم، گفته می‌توانیم، درهر متریکس $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که دیتر منانت آن خلاف صفر باشد $|A|\neq 0$ معکوس دارد که از روی فارمول $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ دریافت می‌کنیم.



تمرین

1- کدام یک از متریکس‌های زیر، دارای معکوس اند.

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2- معکوس ضربی متریکس‌های زیر را به دست آورده امتحان کنید.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

حل سیستم معادلات خطی با استفاده از معکوس متریکس

آیا تابه حال برای سیستم معادلات با استفاده از معکوس متریکس‌ها فکر کرده اید؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

سیستم معادلات دومجهوله $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 = c_2 \end{cases}$ را درنظر گرفته:

- متریکس ضرایب، مجهول ها و متریکس حدود ثابت را بنویسید.
- هر متریکس را به شکل معادله بنویسید.
- اطراف معادلهٔ به دست آمده را ضرب معکوس متریکس ضرایب نمایید.

از فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را می‌توان بیان کرد.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

A متریکس ضرایب سمت چپ، B متریکس ستونی ضرایب ثابت سمت راست و x متریکس اعداد مجهول است. با درنظر داشت A^{-1} سیستم طوری زیر حل می گردد.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

مثال 1: سیستم معادلات دومجهوله $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ را با استفاده از متریکس معکوس حل نمایید.

حل: می دانید که

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

چون $|A| \neq 0$ صفر است، پس معکوس متریکس داده شده وجود دارد؛ پس:

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 - 2.7 \\ -1.5 + 1.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 14 \\ -5 + 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x = 1 \quad , \quad y = 2$$

مثال 2: سیستم معادلات $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ را با استفاده از معکوس متریکس حل نمایید.

حل: می‌دانید که:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

پس معکوس متریکس داده شده عبارت است از:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 + 2.3 \\ -3.2 + 5.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2 \\ -6 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x = 4, \quad y = 9$$

مثال3: به کدام قیمت x و y معادلات زیر هم زمان صدق می کند؟

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = A^{-1} B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 - (-12) = -12 + 12 = 0$$

چون دیترمنانت متریکس مربوط مساوی به صفر است پس متریکس A معکوس ندارد؛ پس سیستم معادلات حل ندارد.



تمرین

سیستم معادلات زیر را در نظر گرفته با استفاده از معکوس متریکس‌ها مجهول‌ها را به دست آورده و امتحان کنید.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

حل سیستم معادلات به طریقهٔ کرامر

Crammer's Rule

آیا می‌توان به کمک دیترمنانت متریکس ضرایب و دیترمنانت با مجهولات x, y, z حل سیستم معادلات را به دست آورد ؟

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

سیستم معادلات سه مجهول را در نظر گرفته و متریکس ضرایب آن را A می‌نماییم.

$$a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{13}\,z=d_1$$

$$a_{21}\,x+a_{22}\,y+a_{12}\,z=d_2$$

$$a_{31}\,x+a_{32}\,y+a_{33}\,z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مقادیر y,x و z را می‌توانیم از روابط زیر به دست آورد به شرط آن‌که $|A|\neq 0$ باشد!

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

در روابط بالا $|Ax|$, $|Ay|$ و $|Az|$ را به ترتیب دیترمنانت متریکس‌های متناظر بـه y,x و z می‌نامند. برای محاسبهٔ آن‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم، متریکس افزودهٔ سیستم را می‌نویسیم.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

برای محاسبه $|A_x|$ به جای ستون اول(ضرایب x) ستون چهارم(مقادیر ثابت) طرف راست سیستم را قرار داده. دیترمنانت متریکس 3×3 را به دست آورد و برای محاسبه $|A_y|$ به جای ستون دوم (ضرایب y) ستون چهارم(مقادیر ثابت طرف راست سیستم قرار داده دیترمنانت متریکس 3×3 را به دست آورد، به همین ترتیب، برای محاسبه $|A_z|$ به جای ستون سوم، ستون چهارم را قرار داده دیترمنانت متریکس 3×3 را به دست آورد.



فعالیت

- با استفاده از معلومات فوق، مقادیر $|A_x|$, $|A_y|$ و $|A_z|$ را بنویسید

مثال 1: حل سیستم معادلات $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ را به قاعدۀ کرامر به دست آورید.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

مثال 2: حل سیستم معادلات را به قاعدۀ کرامر به دست آورید.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &= -9-4+4-12-6-2 \\ &= -21-8 = -29 \neq 0 \end{aligned}$$

چون $|A| \neq 0$ است پس سیستم معادلات حل دارد.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &= 12-22+20-(66-8+10) \\ &= 10-68 = -58 \end{aligned}$$

$$X = \frac{|A_x|}{A} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{matrix} \begin{aligned} &= 15-8+22-(20+33+4) \\ &= -23+22-57 = -58 \end{aligned}$$

$$y = \frac{|A_y|}{A} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 99-20-8-(-24+30-22)$$

$$= 71+16 = 87$$

$$z = \frac{|A_z|}{A} = \frac{87}{-29} = -3$$

امتحان: قیمت‌های به دست آمدهٔ y, x و z را در سیستم اصلی معادلات وضع می کنیم.

$$3)(2) - 2(2) + 2(-3) = 6 - 4 - 6$$

$$= -4 \Rightarrow -4 = -4$$

$$2 + 3(2) - 3 = 2 + 6 - 3 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

$$2(2) + 2(2) - (-3) = 4 + 4 + 3 = 11 \Rightarrow 11 = 11$$



فعالیت

- حل سیستم معادلات زیر را به طریقهٔ کرامر به دست آرید:

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$



تمرین

1- حل سیستم معادلات زیر را درصورت امکان دریافت کنید:

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

حل سیستم معادلات خطی به طریقهٔ حذفی *Gouse*

آیا می‌تون با استفاده از متریکس، مقادیر مجهول y, x و z را دریافت کرد؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

برای حل سیستم معادلات به طریق Gouse متریکس ضرایب و مقادیر ثابت را نوشته به ترتیب طی چند مرحله به انجام دادن عملیهٔ ضرب جمع یا تفریق تقسیم و یا تغییر دادن جاهای سطر ها با یکدیگر، دو مجهول را حذف، مجهول سوم را محاسبه کرد؛ سپس قیمت مجهول دیگر را به دست آورد. سطرهای متریکس را به ... R_1, R_2 نشان می‌دهیم.

مثال 1: $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$

حل: متریکس ضرایب را می‌نویسیم. از سطر اول، سطر دوم را کم می‌کنیم و در سطر دوم می‌نویسیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 1 & 3 & : & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{سطردوم را از سطر اول منفی و در سطر دوم می نویسیم.}]{R_1-R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{سطر دوم را به (-1) ضرب به سطر دوم می نویسیم}]{R_2\cdot(-1)\to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 0 & 1 & : & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y=2\ ,$$

برای دریافت قیمت x، قیمت y را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$x+2y=5$$
$$x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4$$
$$x=1$$

فعالیت

سیستم دو معادله و دو مجهول را به طریقهٔ Gouse حل کنید.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

مثال2: سیستم معادلات سه مجهوله را به طریق گوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: ابتدا متریکس ضرایب و مقادیر ثابت را می‌نویسیم.

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

در مرحلهٔ اول سطر اول را ضرب $3-$ نموده با دو چند سطر دوم جمع نموده در سطر دوم می‌نویسیم.

مرحلهٔ اول

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

در مرحلهٔ دوم

سطر اول را به $2-$ ضرب نموده با سطر سوم جمع می‌کنیم در سطر سوم می‌نویسیم.

مرحلهٔ دوم

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

درمرحلهٔ سوم ضرایب y را از سطر حذف می‌کنیم؛ طوری‌که $-8R_2$ را با $7R_3$ جمع نموده در سطر سوم می‌نویسیم.

مرحلهٔ سوم

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{pmatrix}$$

از سطر سوم می‌توانیم قیمت z را به دست آورد.

$$-35z=-105 \Rightarrow z=\frac{105}{35} \quad , \quad z=3$$

قیمت z را درسطر دوم قرار داده قیمت y را به دست آورد.

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+7\cdot 3=7 \Rightarrow -7y=7-21$$

$$-7y=-14 \Rightarrow y\frac{-14}{-7} \quad , \quad y=2$$

قیمت y و z در یکی از معادلات قرار داده قمیت x را به دست می‌آوریم.

$$2x+3(2)-3=5$$

$$2x+6-3-5=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

حل سیستم $(x\ ,\ y\ ,\ z\ )=(1\ ,\ 2\ ,\ 3)$

امتحان: قیمت‌های به دست آمدهٔ y, x و z را در اصل سیستم قرار داده امتحان می کنیم:

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad , \quad 5=5$$

$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \quad , \quad 11=11$$

$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad , \quad 3=3$$

مثال3: سیستم معادلات زیر را به روش Gouse حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3=18 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=24 \\ 2x_1+7x_2+12x_3=40 \end{cases}$$

حل: درمرحلهٔ اول سطر اول را ضرب عدد -2 نموده با سطر دوم جمع در سطر دوم می‌نویسیم در مرحلهٔ دوم سطر اول را ضرب عدد (-1) نموده با سطر سوم جمع می کنیم به سطر سوم می‌نویسیم.

مرحله اول   مرحله دوم

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right)$$

مرحله سوم

$$\xrightarrow{R_2+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

در مرحلهٔ سوم سطر دوم را با سطر سوم جمع نموده در سطر سوم می‌نویسیم.

دیده می‌شود. در متریکس به دست آمده ضرایب x_1 x_2 , x_3 در سطر سوم صفر می‌باشد در حالی که عدد ثابت در این سطر 10 است و این غیر ممکن است؛ پس سیستم حل ندارد.

فعالیت

سیستم معادلات زیر را حل و امتحان کنید:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

توجه: هرگاه در یک سیستم، معادلات یکی از مجهول ها وجود نداشت ضرایب آن را صفر گرفته و بعد از آن متریکس ضرایب و مقادیر ثابت را تشکیل کنید.

تمرین

سیستم معادلات زیر را به روش Gouse حل کنید.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

نکات مهم فصل ششم

تعریف متریکس: هرگاه دسته‌یی از اعداد به شکل سطری یا ستونی در یک جدول مستطیلی قرار داده شود. به نام متریکس Matrix یاد می‌شود.

انواع متریکس‌ها

- **متریکس سطری:** تنها دارای یک سطر باشد.
- **متریکس ستونی:** تنها دارای یک ستون باشد.
- **متریکس صفری:** تمام عناصر آن صفر باشد.
- **متریکس مربعی:** آن متریکس که تعداد سطرها وستون‌های آن مساوی باشند، به نام متریکس مربعی یاد می‌شود.
- **متریکس قطری:** به آن متریکس گفته می‌شود که تمام عناصر آن به غیر از قطر اصلی مساوی به صفر باشند.
- **متریکس سکالر:** هر متریکس قطری که عناصر قطر اصلی آن مساوی باشند. متریکس سکالر یاد می‌شود.
- **متریکس واحد:** اگر در یک متریکس اسکالر عناصر قطر اصلی عدد 1 باشد. متریکس واحد یاد می‌شود.

عملیات بالای متریکس‌ها

- **جمع و تفریق متریکس:** وقتی ممکن است که:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = \left|a_{iJ}\right|_{m\times n} \pm \left|b_{ij}\right|_{m\times n} = \left|a_{iJ} \pm b_{ij}\right|_{m\times n} = \left|C_{ij}\right|_{m\times n} = C_{m\times n}$$

خواص جمع و تفریق متریکس‌ها

1) $A+B=B+A$ 2) $A-B\neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$ 4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

ضرب یک متریکس در سکالر اگر $K\in IR$ و $A=(a_{iJ})$ باشد؛ پس: $K(a_{ij})_{m\times n}C_{ij}=C_{m\times n}$

خواص ضرب متریکس در سکالر

$a)\quad \alpha(A+B)=\alpha\ A+\alpha\ B$

$b)\quad (\alpha+\beta)A=\alpha\ A+\beta\ A$

$c)\quad \alpha(\beta\ A)=(\alpha\ \beta)A=\beta(\alpha\ A)$

ضرب دو متریکس $A\cdot B=(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=(C_{ij})_{m\times p}=C_{m\times p}$

خواص ضرب دو متریکس هرگاه $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{n\times p}$ باشد؛ پس:

1) $AB\neq BA$ 2) $(AB)C=A(BC)$

3) $A(B+C)=AB+AC$ 4) $I\cdot A=A\cdot I$

5) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

ترانسپوز یک متریکس: هرگاه جای سطرها و ستون‌های متریکس A_{mxn} را با یکدیگر تبدیل کنیم متریکس جدید را به نام ترانسپوز یاد می‌کنند و به A^T نشان داده می‌شود.

متریکس مثلثی: اگر در یک متریکس تمام عناصر فوقانی یا تحتانی قطر اصلی صفر باشد. متریکس مذکور به نام متریکس مثلثی یاد می‌شود.

متریکس متناظر: اگر یک متریکس ترانسپوز A^T با متریکس خود، یعنی A مساوی باشد به نام متریکس متناظر یاد می‌شود.

دیترمنانت: اگر یک متریکس A به عدد حقیقی نسبت داده شود به نام دیترمنانت متریکس A یاد می‌شود. به شکل |A| یا det A نشان داده شود.

خواص دیتر منانت:

1- هرگاه تمام عناصر یک سطر یا ستون متریکس A_{nxn} مساوی به صفر باشد؛ آن‌گاه $|A|=0$

2- هرگاه عناصر دو سطر یا دو ستون باهم مساوی باشند؛ پس $|A|=0$

3 - هرگاه عناصر یک سطر یا ستون متریکس A_{nxn} مضربی از عناصر سطر یا ستون دیگر باشند؛ آن‌گاه $|A|=0$ متریکس A وترانسپوز دیترمنانت متریکس با هم مساوی اند.

4 - $\left|A^T\right|=|A|$

معکوس ضربی متریکس‌ها: متریکس مربعی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را در نظر گرفته اگر متریکس مربعی B وجود داشته باشد طوری‌که $AB=BA=I_n$ را در این صورت A^{-1} را معکوس متریکس A گویند و به شکل A^{-1} نشان می‌دهند. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

حل سیستم معادلات خطی

- حل سیستم معادلات خطی با استفاده از معکوس ضربی متریکس
- حل سیستم معادلات خطی با استفاده از طریقهٔ کرامر
- حل سیستم معادلات خطی با استفاده از طریقهٔ حذفی Gouse



تمرین فصل ششم

به سؤالات زیر چهار جواب داده شده، جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1- اگر $|A|=3$ باشد آن‌گاه $|A|^{-1}$ کدام است ؟

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

2- اگر متریکس $\begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس پذیر باشد آن‌گاه m کدام است ؟

$a)\ m=1,\frac{1}{2}$ $\quad b)\ m\neq 1$ $\quad c)\ m=0$ $\quad d)\ m\neq 1,\frac{1}{2}$

3- اگر $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ باشد؛ آن‌گاه متریکس x که رابطهٔ $Ax=A^{-1}$ را صدق کند. کدام است؟

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4- تغییر یافتهٔ خط $y=2x$ تحت متریکس $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ کدام است ؟

a - محور y ها $\quad$ b - محور xها $\quad$ c - $y+2x=0$ $\quad$ d - $y=0$

5- در دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ قیمت x کدام است ؟

$a)\ x=1,2$ $\quad b)\ x=3,1$ $\quad c)\ x=\frac{1}{2},3$ $\quad d)\ x=3,2$

6- در دیترمینانت $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ حاصل را به دست آورید.

$a)\ 29$ $\quad b)\ 39$ $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

سؤالات زیر را حل کنید.

1- فرض کنید $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ داده شده باشند؛ مطلوب است محاسبهٔ :

$a)\ 3A-2B \quad , \quad b)-4A+3B$

2- فرض کنید $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ داده شده باشند؛ مطلوب است محاسبهٔ AB BA آیا $AB=BA$ است.

3- متریکس‌های $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ را درنظر گرفته خاصیت اشتراکی، خاصیت توزیع پذیری ضرب متریکس را برای سه متریکس فوق نشان دهید.

4- دیترمنانت $A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$ را به شکل مختصر محاسبه کنید.

5- معکوس متریکس $M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ را به دست آورید.

6- سیستم معادلات زیر را به طریق کرامر حل کنید.

$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$

7- سیستم معادلات زیر را به طریق Gouse حل کنید.

$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$

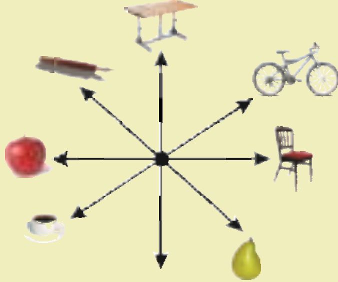
8- سیستم معادلات زیر را به طریق معکوس متریکس حل کنید:

$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$

فصل هفتم
وکتورها در فضا


z
دیوار راست
دیوار چپ
y
o
کف اتاق
x

وکتورها در سیستم مختصات قایم



از یک نقطهٔ ثابت، به طرف اشیای موجود چهار اطراف تان؛ نزدیکترین مسیر راه را نشانی کنید.

تعریف

قطعه خط جهت دار را وکتور گویند.یا به عبارت دیگر،کمیتی که هم‌جهت داشته باشد وهم مقدار مثل؛ قوه، فاصله، تعجیل وغیره. ست تمام تیرهایی که دارای طول مساوی، موازی و هم‌جهت باشند به نام وکتور یاد می‌گردد. وکتوری که ابتدای آن درمبدأ سیستم کمیات وضعیهٔ قایم قرار داشته باشد، به نام شعاع وکتور (Position Vector) یاد می‌گردد.

فعالیت

- در یک سیستم کمیات وضعیهٔ قایم یک شعاع وکتور را طوری رسم نمایید که مختصات انجام آن $B(5,5)$ باشد.
- سه وکتور ممثل یک وکتور داده شدهٔ فوق را در سیستم مختصات داده شده رسم کنید که موقعیت آن، با شعاع وکتور متفاوت باشد.
- وکتور دیگری را که مخالف جهت وکتور فوق و طول مساوی داشته باشد به‌حیث شعاع وکتور رسم کنید.

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

نتیجه: در یک مستوی، ممثل هر وکتور، برابر به شعاع وکتور بوده؛ بنابراین داریم که:

1- دو وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی گفته می‌شوند هرگاه دارای عین طول $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ و هم‌جهت باشند.

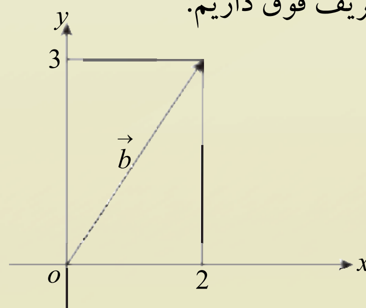
2- هرگاه $\vec{AB}=\vec{0}$ باشد، در این صورت وکتور $\vec{AB}$ به نام وکتور صفری یا Zero Vector یاد می‌شود.

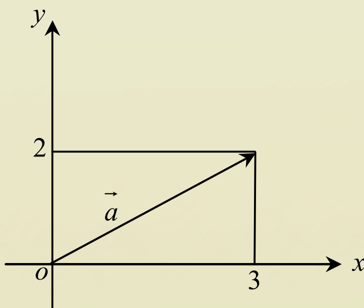
3- دو وکتور به یکدیگر مخالف نامیده می‌شوند. هرگاه دارای طول مساوی؛ اما مخالف‌الجهت باشند؛ طور مثال، هرگاه $\vec{OA} = \vec{a}$ باشد $\vec{AO} = -\vec{a}$ می‌شود درحالی که $|\vec{OA}| = |\vec{AO}|$

تعریف: یک وکتور در سیستم مختصات قایم به شکل ستونی $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ درحالی‌که a_x عبارت از مختصهٔ روی محور x و a_y مختصهٔ روی محور y باشد.

مثال 1: وکتورهای $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ را در سیستم مختصات قایم، نشان دهید.

حل: با درنظرداشت تعریف فوق داریم:





یادداشت: نشان دادن یک وکتور در مستوی به خاطر به‌کار برده می‌شود که برای ارائه، یک نقطه در سیستم مختصات قایم تنها یک محل در سیستم مختصات وجود دارد درحالی‌که برای ارائهٔ یک وکتور در مستوی بی‌نهایت جاها وجود دارد.



تمرین

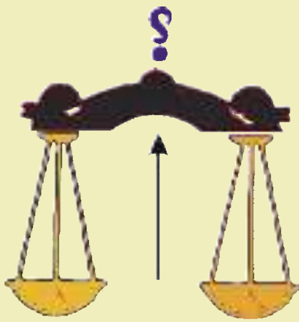
1- برای وکتورهای که در مثال 1 داده شده، مطلوب است.

a) سه وکتور ممثل هر کدام را دریابید.

b) هر دو وکتور را در موقعیت شعاع وکتور رسم کنید.

c) وکتورهای مخالف آن‌ها کدام وکتورها اند؟

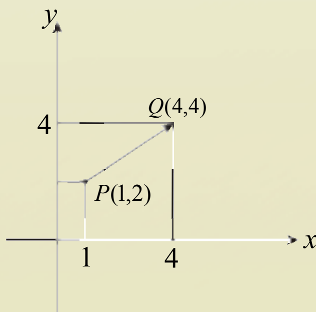
فاصله و نقطهٔ وسطی بین دو نقطه



دو پلهٔ یکسان و هم وزن ترازو را درنظرمی گیریم که به دو طرف یک شاهین ترازو بسته شده اند.
کدام نقطه را روی شاهین برای دستهٔ ترازو انتخاب نماییم تا با گرفتن آن، پله‌های ترازو درحال تعادل قرار گیرند؟

فعالیت

- نقاط $P(1,2)$ و $Q(4,4)$ را قرار شکل زیر در سیستم مختصات قایم درنظر بگیرید:



- طول وکتور $\overrightarrow{PQ}$ را با استفاده از فاصله بین دو نقطه دریافت کنید؟
- مختصات نقطهٔ وسطی $\overline{PQ}$ را دریافت کنید؟

از انجام فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را می‌توانیم بیان کرد:

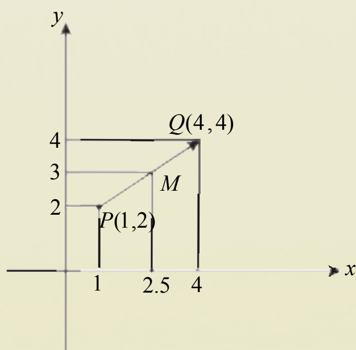
نتیجه

برای هر دو نقطهٔ اختیاری $P(x_1,y_1)$ آغاز و $Q(x_2,y_2)$ انجام وکتور $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ باشد، در این صورت وکتور را به $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$ نشان داده بادرنظرداشت مثلث قایم الزاویه $\overset{\Delta}{PQN}$ طول وکتور $|\vec{a}|$ عبارت است از: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+b_y{}^2}$

– نقطهٔ وسطی $\overrightarrow{PQ}$ عبارت از $M=\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$ بوده که نقطهٔ وسطی P و Q را تشکیل می‌دهد.

مثال 1: نقطهٔ وسطی و فاصلهٔ دو نقطهٔ P(1,2) و Q(4,4) را دریافت نمایید.

حل: با استفاده از فورمول نقطهٔ وسطی داریم:



$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\ \frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$$

بنابراین، مختصات نقطهٔ وسطی عبارت از $M\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$ می‌باشد. برای اندازهٔ فاصله بین دو نقطهٔ P و Q نظر به قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

مثال 2: نقطهٔ وسطی و فاصله بین نقاط $A(2,4)$ و $B(5,5)$ را دریافت کنید؟

حل: با استفاده از فورمول نقطهٔ وسطی داریم:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\ \frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,5\\ 4,5\end{pmatrix}$$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$



تمرین

فاصله و نقطهٔ وسطی بین نقاط داده شدهٔ زیر را دریافت نمایید؟

(i): $B(2,7)$ ، $A(3,4)$

(ii): $N(5,1)$ ، $M(1,5)$

(iii): $Q(8,8)$ ، $P(1,8)$

وکتورها در سطح و فضا

مسیر مشاهدهٔ ستاره‌ها توسط تلسکوپ، وکتورهای جداگانه را در فضا نشان می‌دهد. آیا مثالی برای ارائهٔ وکتورها روی یک سطح آورده می‌توانید؟



فعالیت

قرارشکل زیر، سیستم مختصات قایم و ست $IR^2 = \{(x, y) : x, y \in IR\}$ را درنظر گرفته، فعالیت زیر را انجام دهید:

- یک نقطهٔ P سیستم مختصات کارتیزین که دارای مختصات (x, y) است در مستوی مشخص کنید.
- یک شعاع وکتور $\vec{u}$ که دارای مختصات $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ باشد، در سیستم مختصات نشان دهید.
- آیا یک نقطهٔ P در مستوی که دارای مختصات (x, y) و یک وکتور $\vec{u}$ در مستوی که دارای مختصات $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ باشد، از هم چه فرق دارند؟
- برای دو وکتور اختیاری $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ و یک عدد سکالری $a \in IR$ به شکل هندسی در سیستم مختصات قایم به صورت جداگانه نشان دهید که:

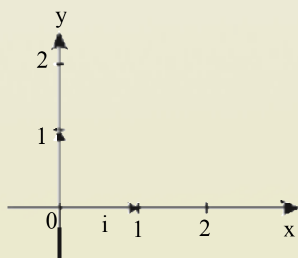
$$\text{(i):} \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x \\ y' + y \end{pmatrix} \quad \text{(قاعدهٔ جمع)}$$

$$\text{(ii):} \quad a \cdot \vec{u} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \quad \text{(قاعدهٔ ضرب سکالری)}$$

تعریف: ست تمام جوره‌های مرتب که برای آن‌ها مانند فوق قاعدهٔ جمع و ضرب سکالری صدق کند، به نام فضای وکتوری IR^2 و یا وکتورها در مستوی یاد می‌گردد.

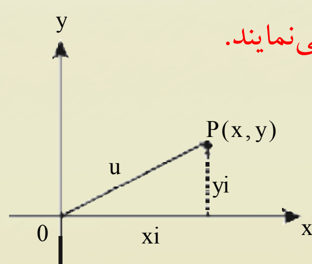
از انجام فعالیت و تعریف بالا نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

نتیجه: با درنظر داشت دو وکتور خاص $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ که طول آن‌ها $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ بوده،



برای هر وکتور اختیاری $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ داریم:

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$$



$\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به نام وکتورهای واحد به امتداد محورهای x و y یاد می‌نمایند.

وکتور واحد، وکتور است که طول آن یک واحد بوده و فقط برای تزاید جهت مختصه به‌کار می‌رود.

مثال 1: هرگاه $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ باشند، قیمت وکتورهای زیر را دریافت نمایید:

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل: داریم که:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

تمرین

1- هرگاه $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ باشند، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ و $2\vec{u}+4\vec{v}$ را دریافت کنید.

مختصات نقطه در فضای سه بُعدی

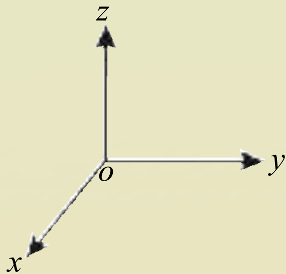
اگر یک نقطه را در فضای صنف مشخص کنیم آیا راه حل وجود دارد که فاصلهٔ آن نقطه را نسبت به کف صنف و دیوار مجاور آن بسنجیم؟



تعریف

فضای IR^3 عبارت از مجموعهٔ تمام سه تایی‌های مرتب (x, y, z) می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود. $IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$

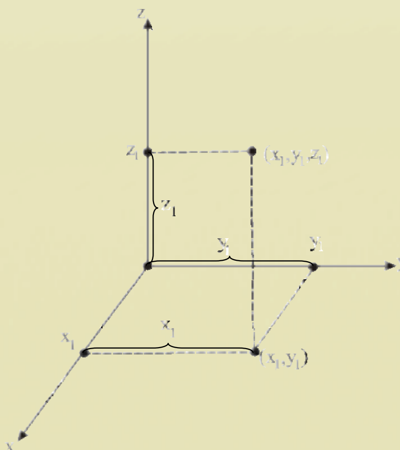
اگر سه صفحهٔ دوبه دو عمود را به p_3, p_2, p_1 نشان داده؛ آن ها را صفحات مختصات بنامیم فصل مشترک دو به دوی این صفحات یک کنج، سه زاویهٔ قایمه را تشکیل می‌دهند که آن را دستگاه محورهای مختصات سه بُعدی می‌نامیم.



این طور نام گذاری می کنیم، اگر بیننده‌یی در امتداد محور قایم(محور z,) بایستد، محوری که روبه روی آن قرار می گیرد محور y و محور دست راست را محور x می‌نامیم. نقطهٔ مشترک سه محور را به O نشان داد، و آن را مبدأ مختصات می گوییم. فاصلهٔ مختصات را از مستوی به $|x|$، $|y|$ و $|z|$ نشان می‌دهیم.

تعیین یک نقطه درفضای سه بُعدی

برای مشخص کردن موقعیت یک نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ در دستگاه مختصات قایم به ارتباط هر محور با در نظر داشت علامت، فواصل را جدا می کنیم.



ابتدا بالای محور x فاصله را جدا ساخته از همین نقطهٔ تعیین شده، بالای محور x خط موازی به محور y رسم می کنیم. تقاطع (x, y) را دریافت نموده بعد از آن از نقطهٔ نامبرده یک خط موازی به محور z به اندازهٔ فاصلهٔ جدا شده بالای محور z رسم می کنیم در نتیجهٔ تقاطع

محورها، نقطه به دست می‌آید. که به این ترتیب، تعیین نقطه در فضا تکمیل می‌شود.

فعالیت

- نقاط $A(2,4,3)$ و $B(-2,-3,3)$ را در سیستم مختصات قایم در فضای سه بُعدی نشان دهید.

در فضای سه بُعدی IR^3 نیز قاعدهٔ حاصل جمع و ضرب سکالری برای هر دو وکتور $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و سکالر a صورت می‌پذیرد.

(قاعدهٔ جمع)
$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$

(قاعدهٔ ضرب سکالری)
$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\,x\\a\,y\\a\,z\end{pmatrix}$$

مثال 2: هرگاه $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ و $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ باشد، $\vec{v}+\vec{w}$، $\vec{v}-\vec{w}$، $2\vec{w}$ و $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ را دریافت کنید.

حل: قیمت‌های $\vec{w}$ و $\vec{v}$ را در رابطه‌های داده شدهٔ آن وضع می‌کنیم.

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

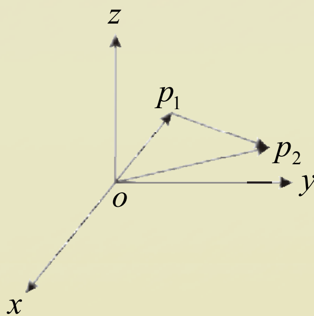
$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left\|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right\|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

یادداشت

A: مشابه، به سطح می‌توان سه وکتور خاص $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ را که $|\vec{i}|=|\vec{y}|=|\vec{k}|=1$ بوده در یک فضای سه بُعدی درنظر گرفته که به نام وکتور واحدهای به امتداد محورهای x، y و z یاد می‌گردد. بادرنظرداشت قاعدهٔ جمع می‌توان هر وکتور اختیاری $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ را با درنظرداشت وکتور واحدها به شکل زیر ارائه نماییم:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x i+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B: فاصله بین دو نقطه درفضا: هرگاه $\overrightarrow{op_1}$ و $\overrightarrow{op_2}$ دو شعاع وکتور نقاط $p_1(x_1,y_1,z_1)$ و $p_2(x_2,y_2,z_2)$ باشند، در این صورت داریم:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

بنابراین، با درنظرداشت فاصله بین نقاط p_1 و p_2 داریم:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

فورمول فوق به نام فورمول فاصله بین نقاط P_1 و P_2 در فضای سه بُعدی یاد می‌گردد.

C: اگرفاصلهٔ یک نقطه در فضای سه بُعدی از مبدأ مطلوب باشد، $(x_1\,,\ y_1\,,\ z_1)=(0\,,0\,,0)$ و $(x_2\,,\ y_2\,,\ z_2)=(x\,,\ y\,,\ z)$

درآن صورت فاصلهٔ نقطه از مبدأ توسط فورمول زیر به دست می‌آید:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

مثال 2: اگر $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ باشد، طول این شعاع وکتور چقدر است؟

حل: چون مبدأ شعاع وکتور در مبدأ کمیات وضعیه است؛ بنابرآن از فورمول فاصلۀ نقطه از مبدأ استفاده می‌نماییم:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

مثال 3: اگر $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{w}=6\vec{i}+9\vec{j}-3\vec{k}$ باشند.

a): دریافت کنید $\quad$ (i): $\vec{u}+2\vec{v}$ $\qquad$ (ii): $|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}|=?$

حل a): داریم که:

$$i)\quad \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$
$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$
$$ii)\quad \vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}-4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}-6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}=-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}$$
$$|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}|=|-8i-12j+2k|=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}=\sqrt{212}$$



تمرین

1- جهت وکتورهای واحد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در یافت کنید.

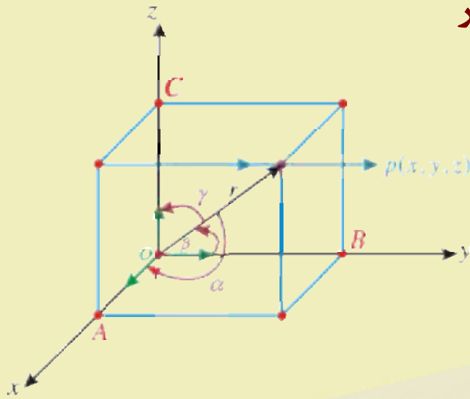
2- وکتورهای $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ و $\vec{w}$ که در مثال 3 داده شده درنظر گرفته مطلوب است؟

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $\qquad$ $b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3- فاصله بین وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و $\vec{w}$ و $\vec{u}$ را دریافت کنید؟

4- آن وکتور واحد ها را در یافت کنید که هم‌جهت وکتور $\vec{u},\vec{v}$ و $\vec{w}$ واقع باشد؟

زوایای جهت وکوساین‌های جهت یک وکتور



تعریف:

هرگاه وکتور شعاع $\vec{r}$ با محورهای مختصات قایم به ترتیب زوایای α, β و γ را بسازد در این صورت با در نظر داشت شکل می‌توانیم نوشت:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_z$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_y$$

کوساین‌های جهت وکتور $\vec{r}$ را طور زیر بنویسیم:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

اطراف روابط را مربع ساخته و بعد باهم جمع می‌کنیم:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

می‌دانیم $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ است؛ بنابرآن:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

هرگاه در یک فضای سه‌بُعدی یک وکتور $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ که خلاف صفر است؛ داده شده باشد؛ طوری‌که مانند شکل بالا α، β و γ به ترتیب زاویای جهت با وکتور واحدهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ باشند در این صورت فعالیت زیر را انجام دهید:

- آیا گفته می‌توانید که زاویای α، β و γ در کدام انتروال تحول می‌نمایند؟
- آیا یکی از زاویای فوق منفی شده می‌تواند؟
- اگر یکی از زاویا مساوی به صفر باشد، در مورد موقعیت وکتور چه گفته می‌توانید؟
- برای کوساین زاویای جهت وکتور $\vec{v}$ یک رابطهٔ مشترک را دریابید؟

از انجام فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: هرگاه $\vec{v}$ یک وکتور خلاف صفر در فضا، یعنی $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ داده شده باشد. در این صورت، بین کوساین‌های جهت آن رابطهٔ زیر برقرار است. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

برای ثبوت نتیجهٔ فوق می‌دانیم که: $|\vec{v}|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

از طرف دیگر، وکتور واحد جهت یا مسیر $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ عبارت از $\begin{pmatrix}\dfrac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|}\\[2ex]\dfrac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|}\\[2ex]\dfrac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|}\end{pmatrix}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ است.

تمرین

1- هرگاه $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ باشند دریافت کنید:

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\quad b)\ v-3\vec{w}=?$ $\quad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2- قیمت α را طوری دریافت نمایید که طول وکتور $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\,\vec{k}$ مساوی به 3 باشد؟

حاصل ضرب سکالری دو وکتور

حاصل ضرب سکالری دو وکتور در انجنیری وفزیک به کار می‌رود و با درنظر داشت زاویه بین آن‌ها با کمیت سکالر مساوی است. اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ است. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

تعریف

دو وکتور خلاف صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در مستوی و یا فضا در نظر می گیریم:

حاصل ضرب سکالری $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را به $\vec{u}\cdot\vec{v}$ نشان داده، عبارت است از: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$

در حالی که θ زاویه بین $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را تشکل داده و $0\le\theta\le\pi$

فعالیت

با در نظرداشت حاصل ضرب سکالری وکتورها نشان دهید که:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv): هر گاه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ خلاف صفر و $\vec{u}.\vec{v}=0$ باشد، پس وکتورها بالای یکدیگر عمود اند.

- برای دو وکتور $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ و $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ حاصل ضرب $\vec{a}.\vec{b}$ مساوی به قیمت سکالری $a_1a_2+b_1b_2$ می‌باشد.

- قیمت حاصل ضرب $\vec{a}\cdot\vec{b}$ در فضا مطلوب است در صورتی‌که $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ و $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ باشد.

در انجام فعالیت فوق برای حاصل ضرب سکالری وکتورها نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: هرگاه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه وکتور اختیاری و c یک عدد حقیقی باشد، پس داریم که:

(i $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

(ii $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (خاصیت تبدیلی ضرب)

(iii $\quad \vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع)

(iv $\quad (c\cdot\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (خاصیت اتحادی ضرب)

مثال 1: اگر $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ و $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دو وکتور خلاف صفر باشند، حاصل ضرب سکالری آن‌ها را دریافت کنید.

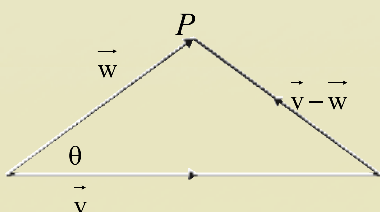
حل: نظر به تعریف داریم:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$
$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})$$
$$=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

مثال 2: اگر $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ و $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ دو وکتور یک مستوی باشند، نشان دهید که:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

با درنظرداشت تعریف داریم:



$$\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\,\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$$

چون $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ بوده در نتیجه $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ بوده؛ بنابرین از رابطهٔ بالا داریم:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=\ |x_1^2+y_1^2||x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

مثال 3: هرگاه وکتورهای $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ داده شده باشند،حاصل ضرب سکالری آن‌ها را دریافت کنید؟

حل: نظر به فورمول داریم:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

مثال4: نشان دهید که وکتورهای $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ و $\vec{v}=-4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ بالای هم عمود اند.

حل: بدین منظور داریم:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k})(-4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$
$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

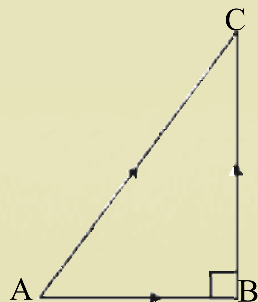
چون حاصل ضرب وکتورها مساوی به صفر است؛ بنابر آن وکتورها، بالای یکدیگر عمود اند.

مثال 5: قیمت α را طوری بیابید که وکتورهای $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ و $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ بالای هم عمود باشند.

حل: از عمودیت $\vec{u}$ بالای $\vec{v}$ باید $\vec{u}.\vec{v}=0$ باشند؛ بنابراین داریم:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

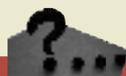
مثال6: نشان دهید که وکتورهای $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ و $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اضلاع یک مثلث قایم الزاویه اند.



حل: اگر $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ را به حیث دو ضلع یک مثلث در نظر بگیریم؛ حاصل جمع وکتورها که ضلع مثلث را تشکیل می‌دهند عبارت از ضلع سوم مثلث است، پس داریم:

برای این که مثلث فوق قایم‌الزاویه باشد؛ بدین ترتیب حاصل ضرب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ شود.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$
$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$



تمرین

1- نشان دهید که مرتسم‌های وکتور $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ به امتداد وکتور واحدهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به ترتیب مساوی به a، b و c می‌باشند؟

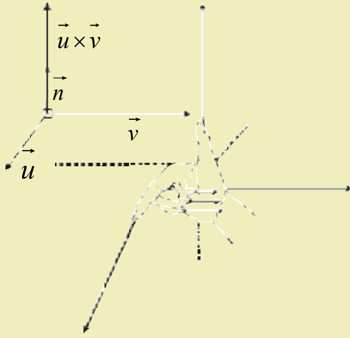
2- نشان دهید که برای هر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ $\qquad$ $ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3- ثبوت کنید که: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

حاصل ضرب وکتوری دو وکتور

The Cross Product



توسط کدام دست (راست یا چپ) می‌توانیم مطابق شکل داده شده وکتورهای $\vec{v}\cdot\vec{u}$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}$ را طوری نشان دهیم که $\vec{u}$ هم‌جهت کف دست، $\vec{v}$ به جهت آرنج و $\vec{u}\times\vec{v}$ به جهت شست راست قرار گیرد؟

تعریف

دو وکتور خلاف صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در نظر می گریم. حاصل ضرب وکتوری دو وکتور $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را $\vec{u}\times\vec{v}$ ($\vec{u}$ کراس $\vec{v}$ (Cross) خوانده می‌شود) عبارت است از: $\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta)\,\vec{n}$

درحالی که θ زاویه بین وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$، $(0\le\theta\le\pi)$ و $\vec{n}$ عبارت از وکتور واحد نارمل که عمود به مستوی $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و توسط قاعدهٔ دست راست (Right hand rule) ارائه می‌شود.

حا صل ضرب وکتوری دو وکتور: قبل از این‌که حاصل ضرب وکتوری دو وکتوررا توضیح کنیم لازم است تا در بارهٔ ترکیب خطی وکتورها، فضا ی وکتوری و استقلال خطی وکتورها مختصر نظر اندازیم.

1- **ترکیب خطی وکتورها**: مجموع مضرب‌های سکالری ووکتوری یک ست به نام ترکیب خطی وکتورهای آن ست یاد می کنند.

اگر وکتور $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\ \dots\ \vec{a}_n$ یک ست وکتورها $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ \dots\ \alpha_n$ سکالرها باشند. درین صورت، $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ را به نام ترکیب خطی وکتورهای $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ یاد می کنند.

مثال 1: هرگاه $\vec{a}_1=2i+j-3k$ و $\vec{a}_2=i+2j+2k$ داده شده باشد، ترکیب وکتورهای خطی آن‌هار را بنویسید. در صورتی که $\alpha_1=5$, $\alpha_2=2$ باشد.

حل:

$$a=5a_1+2a_2=5(2i+j-3k)+2(i+2j+2k)$$
$$=10i+5j-15k+2i+4j+4k$$
$$=12i+9j-11k$$

وکتور $\vec{a}$ را به نام ترکیب خطی وکتورهای $\vec{a_1}$ و $\vec{a_2}$ می‌نامند.

مثال2: هر گاه وکتورهای a_1 و a_2 داده شده باشند. $\vec{a_2}=(5\ ,1)$ و $\vec{a_1}=(2\ ,3)$ نشان دهید که وکتور $\vec{a}=(6\ ,-5)$ تر کیب خطی وکتورهای $\vec{a_2}$ و $\vec{a_1}$ می‌باشد.

حل: $\alpha_1 \, , \alpha_2 \in IR$ سکالر ها اند؛ پس:

$$\vec{a} = (6 , -5) = \alpha_1(2 , 3) + \alpha_2(5 , 1)$$
$$= (6 , -5) = (2\alpha_1 , 3\alpha_1) + (5\alpha_2 , \alpha_2)$$
$$= (6 , -5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2 , 3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$

از سیستم فوق قیمت‌های α_1 و α_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5 \cdot \frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6 , -5) = \alpha_1(2 , 3) + \alpha_2(5 , 1)$$
$$\vec{a} = (6 , -5) = -\frac{31}{13}(2 , 3) + \frac{28}{13}(5 , 1)$$

یعنی قیمت های α_1 و α_2 به وکتورهای $\vec{a_1}$ و $\vec{a_2}$ ضرب شده، در نتیجه وکتور a به دست آمده؛ پس گفته می‌توانیم وکتور $\vec{a_1}$ و $\vec{a_2}$ ترکیب خطی وکتور a است.

ارائهٔ یک وکتور درشکل ترکیب خطی وکتورهای واحد طبعی

اگر وکتورهای موضعی (شعاع وکتور) در فضا ی دو بُعدی سه بُعدی، و بالآخره n داده شده باشند می‌توان آن‌ها را در شکل مجموعه مضرب‌های وکتورهای واحد طوری زیر ارائه نمود.

a- به فضای دوبُعدی $(x_1 , x_2) = (x_1 , 0) + (0 \, , \, x_2)$

چون: $= x_1(1 \, , 0) + x_2(0 \, , 1)$

اگر $e_1 = (0,1)$ و $e_2 = (1 , 0)$ باشند.

پس: $(x_1 , x_2) = e_1x_1 + e_2x_2$

و یا به عبارهٔ دیگر:

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)$$
$$=xe_1+ye_2=xi+yj$$

b - برای فضای سه بُعدی طور زیر به دست می‌آید.

$$(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)=(x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3)$$
$$=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$$

قسمی که $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ و $e_3=(0,0,1)$ وکتور واحد است؛ بنابر این:

$$(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$$
$$(x,y,z)=xi+yj+zk$$

c- حالت عمومی فضای n بُعدی

$$(x_1,x_2\ \dots\ x_n)=(x_1,0\dots0)+(0,x_2\dots0)+\dots+(0,0,\ \dots,x_n)$$
$$=x_1(1,0,\ \dots,0)+x_2(0,1,\ \dots,0)+\dots+x_n(0,0,\ \dots,1)$$
$$=x_1e_1+x_2e_1+\dots+e_nx_n$$

درحالی که $e_1,e_2,\dots,e_n$ را به نام وکتور واحد یاد می کنند.

وکتورهای خطاً مستقل: وکتورهای $a_1,a_2,\ \dots,a_n$ در یک ساحهٔ وکتوری، خطاً مستقل یا دارای استقلال خطی است؛ در صورتی که ترکیب خطی $\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+\dots+\alpha_n\vec{a_n}=0$ مساوی به صفر باشد؛ همچنان $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ باشند.

فعالیت

هرگاه $S=\{(1,0,0)\,(0,1,0)(0,0\,1)\}$ نشان دهید که S خطاً مستقل است.

وکتورهای خطاً مربوط: $\vec{a_1},\vec{a_2},\ \dots,\vec{a_n}$ خطاً مربوط یا دارای انحصار خطی نامیده می‌شوند؛ اگر تنها وکتورهای $\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+\dots+\alpha_n\vec{a_n}=0$ باشد و کم از کم یکی از ضرایب $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots,\alpha_n$ وکتورها خلاف، صفر باشد.

یاداشت: برای به دست آوردن یک ست وکتورها که دارای استقلال خطی است؛ باید مراحل زیرا در نظر بگیریم.

مرحلهٔ اول: ترکیب وکتورها را به دست آورده؛ مساوی به صفر قرار می‌دهیم .

مرحلهٔ دوم: عملیهٔ جمع وکتورها را اجرا می‌نماییم.

مرحلهٔ سوم: سیستم معادلات را تشکیل می‌دهیم.

مرحلهٔ چهارم: سیستم معادلات را برای سکالر ها حل نموده در صورتی که تمام سکالر ها صفر شوند در این صورت حکم می‌کنیم که وکتورهای مذکور دارای استقلال خطی اند در غیر آن دارای انحصار خطی می‌باشند.

مثال: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ داده شده باشند؛ طوری که $a_1=(1,2,0),\ a_2=(0,3,1),\ a_3=(2,3,1)$ نشان دهید که وکتورها دارای استقلال خطی اند؟ یا خیر.

حل: با استفاده از رابطهٔ وکتورهای استقلال خطی می‌توان نوشت:؛

مرحلهٔ اول: $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3=\alpha_1(1,2,0)+\alpha_2(0,3,1)+\alpha_3(2,3,1)=0$

مرحلهٔ دوم:

$$=(\alpha_1,2\alpha_1,0)+(0,3\alpha_2,\alpha_2)+(2\alpha_3,3\alpha_3,\alpha_3)=(0,0,0)$$
$$=(\alpha_1+0+2\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3,0+\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)$$

مرحلهٔ سوم:

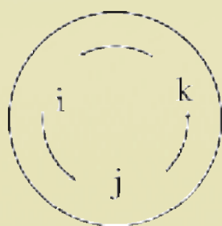
$$\begin{cases}\alpha_1 \ +0 \ +2\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2 \ +3\alpha_3=0\\ 0 \ +\alpha_2 \ +\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 \ +2\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_2 \ +\alpha_3=0\end{cases}$$

مرحلهٔ چهارم: حالا سیستم معادلات فوق را برای $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ حل می‌نماییم.

$$\alpha_2=-\alpha_3$$
$$2\alpha_1+3(-\alpha_3)+3\alpha_3=2\alpha_1-3\alpha_3+3\alpha_3=0 \ \Rightarrow 2\alpha_1=0 \ , \quad \alpha_1=0$$
$$\alpha_1+2\alpha_3=0$$
$$0+2\alpha_3=0 \ \Rightarrow \alpha_3=0$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0$$
$$0+3\alpha_2+0=0$$
$$3\alpha_2=0$$
$$\alpha_2=0$$

چون $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ است؛ بنابر آن وکتورها ارتباط خطی ندارد.

فعالیت



- با درنظرداشت تعریف قاعدهٔ دست راست مسیر، جهت، $\vec{u}\times\vec{v}$، $\vec{v}\times\vec{u}$ را در شکل مقابل نشان دهید؟
- نشان دهید که $\vec{i}\times\vec{i}=0$ و $\vec{i}\times\vec{j}=k$ است؟
- با استفاده از بند بالا برای حاصل ضرب‌های وکتوری $\vec{j}\times\vec{j}$، $\vec{k}\times\vec{k}$، $\vec{j}\times\vec{k}$ و $\vec{k}\times\vec{i}$ چه گفته می‌توانید؟

- نشان دهید که $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ و $\vec{u}\times\vec{u}=0$ است؟

- آیا به صورت عمومی گفته می‌توانیم حاصل ضرب وکتورهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به شکل دایروی یکی از حاصل ضرب اولی و دومی وکتور سومی؛ مانند دایرۀ داده شده به دست می‌آید؟

از انجام فعالیت بالا نتیجۀ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: از حاصل ضرب وکتوری، دو وکتور خلاف صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ با استفاده از قاعدۀ دست راست داریم که:

$$\text{i)}\quad \vec{u}\times\vec{u}=0$$

$$\text{ii)}\quad \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$

$$\text{iii)}\quad \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$

$$\text{iv)}\quad \vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\times(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$$

با تطبیق تعریف حاصل ضرب وکتوری ثبوت اجزای نتیجۀ فوق، برای شاگردان گذاشته شد.

مثال 1: نشان دهید که هرگاه $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ و $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورهای خلاف صفر داده شده باشند؛ پس:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

حل: بااستفاده از تعریف داریم که:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{i}\times\vec{j}&=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}&=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}&=-\vec{k}\end{aligned}\right\}\ ,\quad \left.\begin{aligned}\vec{j}\times\vec{k}&=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}&=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}&=-\vec{i}\end{aligned}\right\}\ ,\quad \left.\begin{aligned}\vec{i}\times\vec{i}&=0\\ \vec{j}\times\vec{j}&=0\\ \vec{k}\times\vec{k}&=0\end{aligned}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k})$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\cdot \vec{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\cdot \vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\cdot \vec{k}$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\cdot \vec{i} - (a_1c_2 - c_1a_2)\cdot \vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\cdot \vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)\cdot \vec{i} - (a_1c_2 - c_1a_2)\cdot \vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\cdot \vec{k}$$

مثال 2: نشان دهید که برای $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ حاصل ضرب $\vec{a}\times\vec{b}$ مساوی به $a\times b = -\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$ می‌باشد.

حل: با استفاده از مثال بالا می‌دانیم که:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\times(4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 8(\vec{i}\times\vec{i}) + 4(\vec{i}\times\vec{j}) - 2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+ 4(\vec{j}\times\vec{i}) + 2(\vec{j}\times\vec{j}) - (\vec{j}\times\vec{k}) + 4(\vec{k}\times\vec{i}) + 2(\vec{k}\times\vec{j}) - (\vec{k}\times\vec{k})$$

$$= 0 + 4\vec{k} + 2\vec{j} - 4\vec{k} + 0 - \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{i} - 0 = -3\vec{i} + 6\vec{j}$$

حاصل ضرب مخلوط (حاصل ضرب سه گانه)Triple Product

تعریف: برای ضرب دو وکتور یا بیشتر از آن چندین امکان وجود دارد که هر کدام از آن ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

i) حاصل ضرب $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

در حاصل ضرب فوق دو وکتور $\vec{b},\vec{a}$ به قسمی سکالری ضرب شده که نتیجهٔ آن یک سکالر است، بعد سکالر مذکور ضرب وکتور $\vec{c}$ نموده که نتیجهٔ یک وکتور حاصل می‌شود که این وکتور با وکتور $\vec{c}$ هم جهت است.

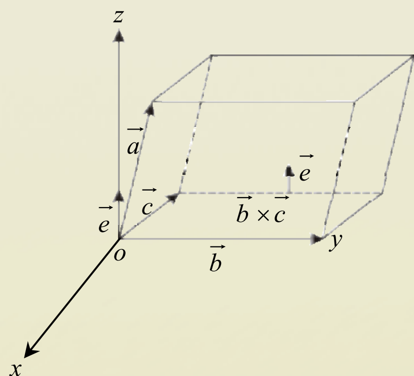
در حاصل ضرب فوق قانون زیر وجود دارد $(\vec{a}\cdot\vec{b})c \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

جهت وکتور $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ هم‌جهت وکتور $\vec{a}$ وجهت وکتور $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ هم‌جهت وکتور $\vec{b}$ می‌باشد.

ii) $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

iii) $$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{b}\times\vec{a})$$

iv) $$\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$



ارتباط $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ و حجم متوازی السطوح عبارت است از : اگر b , a و c اضلاع متوازی الاضلاع باشند قسمی که به شکل دیده می‌شود $|\vec{b}\times\vec{c}|$ قاعده متوازی السطوح و h ارتفاع متوازی‌السطوح است؛ پس از این سبب:

$V=|\vec{b}\times\vec{c}|(\vec{a}\cdot\vec{e})=\vec{b}|(\vec{a}\times\vec{c})|\vec{e}$ حجم متوازی سطوح

$V=\vec{b}(\vec{a}\times\vec{c})=|\vec{b}\times\vec{c}|h$

مسایل تطبیقاتی

1- اگر وکتور $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ در فضا داده شده باشند، مطلوب است وکتوری که بالای هر دو وکتور عمود باشند؟ آیا این وکتور یکتا و یگانه است یا خیر؟ دلیل تان چیست؟

حل: با استفاده از قاعدهٔ دست داشته می‌دانیم که وکتور $\vec{a}\times\vec{b}$ بالای وکتورهای مذکور عمود است، پس داریم که:

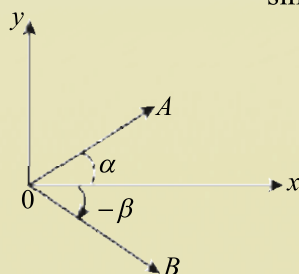
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=7\vec{i}+6\vec{j}-10\vec{k}$$

بنابرین وکتور $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ بالای وکتور $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود بوده؛ اما یگانه نیست؛ زیرا وکتور $\vec{b}\times\vec{a}$ نیز بالای وکتورهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود شده می‌تواند، یعنی داریم:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10k)=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کنید که برای هردو زاویه α و β،

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+sos\alpha\cdot\sin\beta$$



حل: هرگاه $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ دو وکتور واحدی که در مستوی y ، x داده شده اند، باشند؛ طوری که با محور

x زاویای α و β را تشکیل می‌دهند. از شکل می‌دانیم

که: $\hat{AOB} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$

از طرف دیگر، می‌دانیم که $\vec{OA} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ و $\vec{OB} = \cos(-\beta)\,\vec{i} + \sin(-\beta)\,\vec{j}$ بنابرین

داریم که:

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}) \times (\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$$

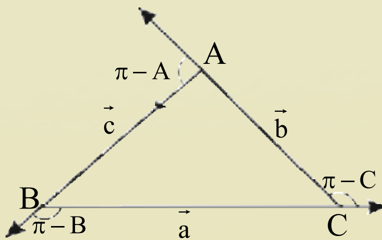
$$= \vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = -\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{OA}\right| \times \left|\vec{OB}\right| = \left|-\vec{k}\right| \cdot \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

3- برای یک مثلث اختیاری $\overset{\Delta}{ABC}$ نشان دهید که:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

حل: فرض می‌نماییم که قرارشکل داده شده وکتورهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به امتداد اضلاع BC، CA و AB یک مثلث ABC داده شده اند، بنابراین داریم:



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a} \qquad ...(i)$$

هرگاه اطراف مساوات را به وکتور $\vec{c}$ ضرب وکتوری نماییم به دست می‌آید:

$$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \times \vec{c} = 0 \Rightarrow \quad \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \left|\vec{c} \times \vec{a}\right|$$

بنابرین طبق تعریف، برای مساوات فوق می‌توانیم بنویسیم:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\, Sin(\pi - A) = |\vec{c}|\ \ |\vec{a}|\ \ Sin(\pi - B)$$

$$\Rightarrow\ \ b\,\vec{c}\ SinA = \vec{c}\,\vec{a}\ SinB \ \ \Rightarrow\ \ bSinA = aSinB$$

$$\Rightarrow\ \ \frac{b}{SinB} = \frac{a}{SinA}\ \ ....\ (ii)\ \ ،\ \ \frac{SinB}{b} = \frac{SinA}{a}\ \ ....\ (ii)$$

مانند بالا اگر اطراف i رابطهٔ با وکتور $\vec{b}$ به شکل وکتوری ضرب کنیم، به‌دست می‌اوریم که:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b}) + (\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$:\vec{b}\times\vec{b} = 0 \ \ \Rightarrow\ \ (\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A = |\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$

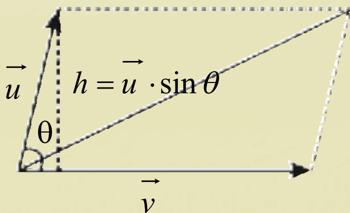
$$c\sin A = a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}\ \ \ ...iii\ ,\ \ \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}\ \ \ ...iii$$

از معادلات (ii) و (iii) فورمول قضیهٔ ساین به دست می‌آید:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

4- مساحت یک متوازی الاضلاع: برای وکتور خلاف صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ که بین خود زاویهٔ θ را قرار شکل زیر تشکیل می‌دهد در نظر می‌گیریم. مشاده می‌نماییم که $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اضلاع متوازی الاضلاع بوده که برای دریافت مساحت آن می‌توانیم بنویسیم:



ارتفاع × قاعدهٔ = مساحت متوازی الاضلاع

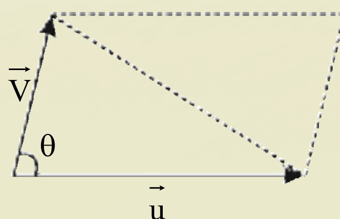
چون $|\vec{v}|$ = قاعدهٔ و $h = |\vec{u}|\cdot\sin\theta$ = ارتفاع می‌باشد؛ بنابراین:

مساحت متوازی الاضلاع $= |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta = |\vec{u}\times\vec{v}|$

یعنی مساحت یک متوازی الاضلاع مساوی به قیمت مطلقهٔ حاصل ضرب وکتوری اضلاع متوازی الاضلاع که در عین حال اضلاع متوازی الاضلاع را نیز تشکیل می‌دهند می‌باشند.

نتیجه: چون مساحت یک مثلث نصف مساحت یک متوازی الاضلاع را تشکیل می‌دهد؛ بنابراین مساحت مثلث با درنظرداشت شکل زیر عبارت است از:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\,(\text{مساحت متوازی الاضلاع}) = \frac{1}{2}(\vec{u}\times\vec{v})$$



تمرین

1- اگر $a_1 = t^2 + t + 2$, $a_2 = 2t^2 + t$ و $a_3 = 3t^2 + 2t + 2$ باشند نشان دهید که وکتورهای مذکور خطاً مستقل نیست.

2- نشان دهید که وکتورهای $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$, $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$ با همدیگر ارتباط خطی دارند.

3- مساحت مثلثی را دریافت نمایید که رأس‌های آن توسط وکتورهای $A(1,-1,1)$، $B(2,1,-1)$ و $C(-1,1,2)$ مشخص شده باشند، همچنان مطلوب است وکتور واحدی که بالای مستوی ABC عمود باشد.

4- مساحت متوازی الاضلاعی را که توسط وکتورهای $P(0,0,0), Q(-1,2.4)$، $R(2,-1,4)$ و $S(1,1,8)$ مشخص شده باشد؟

5- اگر $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$، $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ باشد، حاصل ضرب‌های وکتوری زیر را دریافت کنید؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

وکتورها در سیستم مختصات قایم: ست تمام تیرهای که دارای طول مساوی و باهم موازی و هم‌جهت باشد به نام وکتور یاد می‌گردد. هر وکتوری که دارای طول مساوی و جهت یکسان باشند به نام وکتور ممثل همدیگر یاد می‌گردد، وکتور که مبدأ آن در مبدأ سیستم مختصات قایم قرار داشته باشد به نام شعاع وکتور Position Vector یاد می‌شود. یک وکتور در مستوی به شکل $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ نشان داده می‌شود. a_x عبارت از فاصله روی محور x و a_y عبارت از ترتیب آن روی محور y می‌باشد.

فاصله و نقطهٔ وسطی بین دو نقطهٔ: هرگاه $P(x_1,y_1)$ آغاز و $Q(x_2,y_2)$ انجام یک وکتور $\vec{a}=\vec{PQ}$ باشد، در این صورت وکتور $\vec{a}$ را به $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2 & x_1\\y_2 & y_1\end{pmatrix}$ نشان داده و بادرنظرداشت مثلث قایم الزاویه $\overset{\Delta}{PQN}$ و طول وکتور $|\vec{a}|$ داریم:

فاصله بین نقطهٔ P و Q، $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=$ طول وکتور $\vec{a}$

نقطهٔ وسطی P و Q، $M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$ مختصات نقطهٔ وسطی PQ

وکتور واحد: وکتوری که به جهت یک وکتور داده شده قرار داشته، دارای طول یک واحد باشد، به نام وکتور واحد یاد می‌شود.

مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ وکتور واحدهای سیستم قایم در یک مستوی به جهت محور x و y می‌باشند، درحالی‌که $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ وکتور واحدهای سیستم مختصات قایم در فضا به جهت محورهای x، y و z می‌باشند.

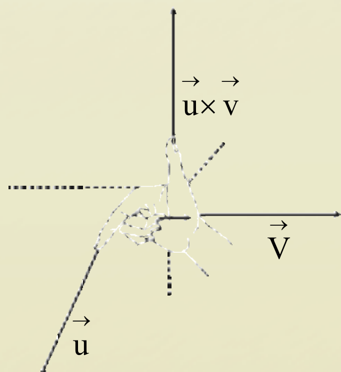
حاصل ضرب سکالری و وکتوری وکتورها: حاصل ضرب سکالری دو وکتور خلاف صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ در مستوی یا فضا عبارت است از: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$

در حالی‌که θ زاویهٔ متشکله بین وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را تشکیل می‌دهد و حاصل ضرب وکتوری آن که یک وکتور بوده توسط $\vec{u}\times\vec{v}$ نشان داده شده و عبارت است از:

$$\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta\cdot\vec{n}$$

در حالی که $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور عمود بالای وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بوده و با وکتورهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ توسط قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود.

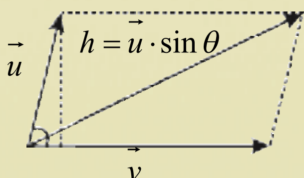
قاعدهٔ دست راست: هرگاه انگشت شهادت را به شکل قایم قات شده؛ مانند شکل زیر درنظر بگیریم، در این صورت، انگشت شهادت جهت محور $\vec{u}$، سه انگشت قات شده در قف دست اطراف یا جهت آرنج محور $\vec{v}$ و شست کلان حاصل ضرب وکتوری $\vec{u}\times\vec{v}$ را نشان می‌دهد.



حاصل ضرب وکتوری دو وکتور در فضا: هرگاه وکتور $\vec{a} = a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ و $\vec{b} = a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ داده شده باشد، در این صورت حاصل وکتوری $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یعنی $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت است از:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

مساحت و حاصل ضرب وکتوری: قیمت مطلقه‌یی حاصل ضرب وکتوری دو وکتور خلاف صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی به مساحت متوازی الاضلاعی است که توسط وکتورها؛ مانند زیر تشکیل می‌شود:



مساحت متوازی‌الاضلاع $= |\vec{u}\times\vec{v}|$



تمرین فصل هفتم

1): اگر $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ و $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ باشد؛ مطلوب است:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{a}\times\vec{b}$

2): هرگاه نقاط $P(2,3)$ و $Q(6_1-2)$ انجام‌های وکتور شعاع‌های $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ باشند، در این صورت وکتور $\vec{PQ}$ را به شکل $xi+yj$ در مستوی بنویسید؟

3): حاصل جمع وکتورهای $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مطلوب است، در صورتی که $A(1,-1)$، $B(2,0)$، $C(-1,3$ و $D(-2,2$ داده شده باشند؟

4): هرگاه $A=(2,5)$، $B=(-1,1)$ و $C=(2,-6)$ داده شده باشند؛ مطلوب است:

i): $\overline{\mathrm{AB}}=?$ ii): $2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ iii): $2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): هرگاه $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ و $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ را داده شده باشد؛ مطلوب است:

$i):\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii):\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii):\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$iv)$: وکتور واحدهای هم‌جهت وکتورهای داده شده $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ را دریافت کنید؟

6): برای وکتورهای داده شده $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاصل ضرب‌های سکالری $\vec{a}\cdot\vec{b}$، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ و حاصل ضرب‌های وکتوری $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ را به دست آورده دو به دو باهم مقایسه کنید، هرگاه a و b داده شده باشند:

i): $\begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}$ ii): $\begin{cases}\vec{a}=i+j\\ \vec{b}=i-j\end{cases}$ iii): $\begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}$ iv): $\begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$

7): مساحت مثلث‌های که رأس ها توسط نقاط زیر مشخص می‌شوند؛ مطلوب است:

$i):\ P(0,0,0),\ \ Q(2,3,2),\ \ R(-1,1,4)$

$ii):\ P(1,-1,-1),\ \ Q(2,0,-1),\ \ R(0,2,1)$

8): مساحت متوازی الاضلاع که رأس‌های آن توسط نقاط زیر مشخص می‌شود؛ مطلوب است:

$i):\quad A(0,0,0),\quad B(1,2,3),\quad C(2,-1,1),\quad D(3,1,4)$

$ii):\quad A(1,2,-1),\quad B(4,2,-3),\quad C(6,-5,2),\quad D(9,-5,0)$

$iii):\quad A(1,-1,1),\quad B(-1,2,2),\quad C(-3,4,-5),\quad D(-3,5,-4)$

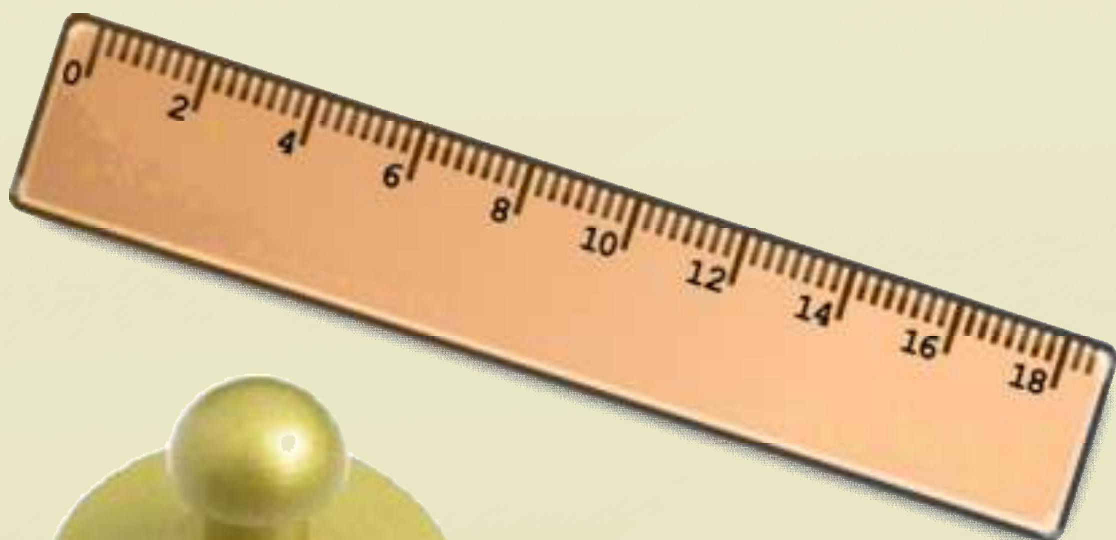
9): کدام وکتورها باهم عمود و کدام شان باهم موازی اند؟

$i):\quad \vec{u}=5i-j+k,\quad \vec{v}=j-5k,\quad \vec{w}=-15i+3j-3k$

$ii):\quad \vec{u}=i+2j-k,\quad \vec{v}=i+j+k,\quad \vec{w}=-\frac{\pi}{2}\vec{i}+\frac{\pi}{2}\vec{j}$

فصل هشتم

احصائیه





$$\frac{\text{وزن}}{\text{قد}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

ضریب تغییرات

Coefficient Variations

اگر پراگنده‌گی یک جامعه را بر حسب متر و پراگنده‌گی جامعهٔ دیگر را بر حسب کیلوگرام بیان نماییم. آیا فکر می‌کنید این پراگنده‌گی‌ها قابل مقایسه استند؟



$$\frac{\text{وزن}}{\text{قد}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

فعالیت

ده نفر از شاگردان صنف خود را به طور تصادفی انتخاب کنید.

- اندازهٔ قد و وزن ایشان را مشخص کنید.
- واریانس و انحراف معیاری، قد و وزن این شاگردان را محاسبه کنید.
- آیا فکر می‌کنید مقایسهٔ میزان پراگنده‌گی این دو متحول از طریق واریانس و انحراف معیاری ممکن است؟ چرا؟
- اگر انحراف معیاری را تقسیم اوسط نمایید، مقدار که به دست می‌آید واحد آن چیست؟

ضریب تغییرات یا پراگنده‌گی نسبی موارد استعمال زیاد دارد که واریانس و انحراف معیاری فاقد آن ها است. یکی از کاربردهای آن مقایسهٔ دو جامعه احصاییوی نا متجانس و ناهمگون است.

ضریب تغییرات که با سمبول CV نشان داده می‌شود عبارت از خارج قسمت انحراف معیاری بر اوسط که عدد مطلق (بدون واحد) است؛ یعنی:

$$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیاری}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad CV = \frac{S}{\bar{x}}$$

ضریب تغییرات را بیشتر به صورت فیصدی می‌نویسند.

اگر ضریب تغییرات به 100 ضرب شود ضریب تحول به دست می‌آید.

$$\text{ضریب تحول } CV\% = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- ضریب تغییرات فقط برای data مثبت تعریف می‌شود.
- اگر همه data با هم برابر باشند ضریب تغییرات صفر است.
- اگر همه data را در یک عدد مثبت ضرب کنیم ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند.
- اگر به همه data یک عدد مثبت را اضافه کنیم ضریب تغییرات جدید کوچکتر از ضریب تغییرات data اولیه است.

مثال 1: ضریب تغییرات data زیر را محاسبه کنید.

1 3 5

$$\overline{X}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum (x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=\frac{8}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$CV=\frac{S}{\overline{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

مثال 2: یک تولید کنندهٔ لامپ تصویر تلویزیون دو نوع لامپ تصویری تولید می‌کند نوع A و نوع B در حالی که عمر متوسط A برابر 1495 ساعت و عمر متوسط نوع B برابر 1875 ساعت و انحراف معیاری آن ها به ترتیب 280 و 310 ساعت است.

کدام یک از این دو نوع لامپ تصویر، دارای پراگنده‌گی نسبی (ضریب تغییرات) بیشتر است؟

حل:

ضریب تغییرات لامپ A:

$$C\cdot D\cdot S_A=\frac{S_A}{\overline{X}_A}=\frac{280}{1495}=0.187\Rightarrow CV_A\%=0.87\cdot 100=18.7\%$$

ضریب تغییرات لامپ B:

$$C\cdot D\cdot S_B=\frac{S_B}{\overline{x}_B}=\frac{310}{1875}=0.165\Rightarrow CV_B\%=0.165\cdot 100=16.5\%$$

چون $CV_A>CV_B$ بنا بر این لامپ نوع A دارای پراگنده‌گی بیشتر است.

تمرین

1- ضریب تغییرات داتاهای زیر را حساب کنید:

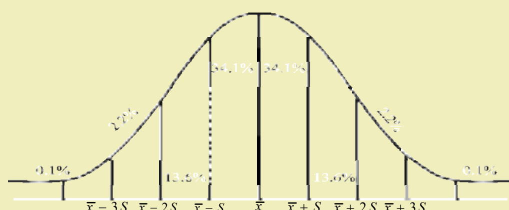
1 3 4 5 6

2- اگر اوسط برابر 4 و انحراف معیاری برابر 6 باشد، ضریب تغییرات چقدر است؟

3- ضریب تغییرات سن شاگردان صنف شما 10 سال بعد چقدر تغییر می‌کند؟ کمتر می‌شود یا بیشتر؟

پراگنده‌گی در منحنی نورمال

Normal Carve

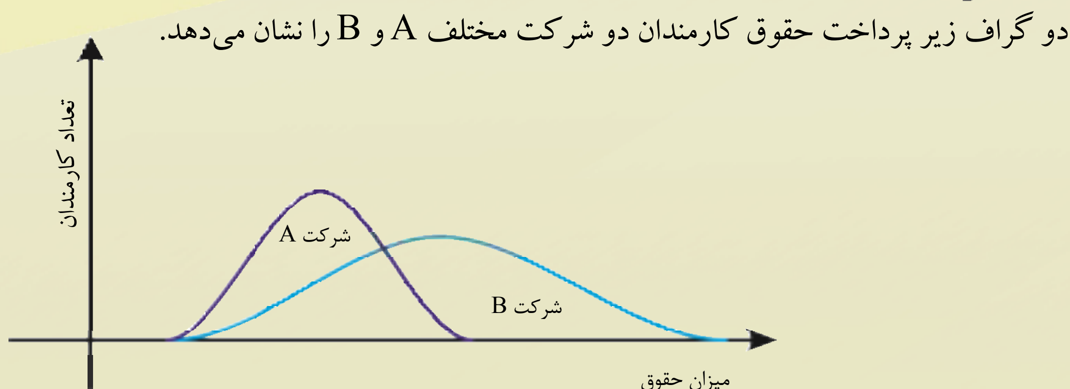


شنیده باشید که می‌گویند: "یک تصویر خوب ارزش هزار کلمه را دارد."

به شکل مقابل نگاه کنید در بارهٔ آن فکر و بحث کنید.

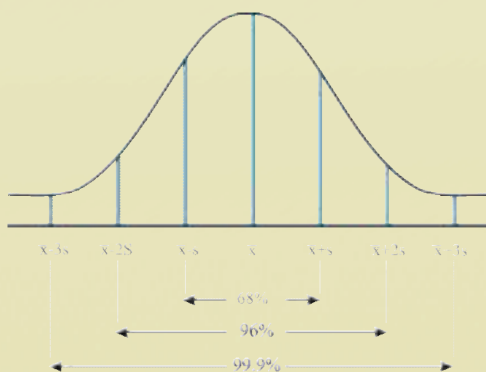
فعالیت

دو گراف زیر پرداخت حقوق کارمندان دو شرکت مختلف A و B را نشان می‌دهد.



- کدام شرکت، اوسط پرداخت حقوق بیشتری دارد؟
- کدام شرکت پراگنده‌گی کمتری در میزان پرداخت حقوق به کارمندانش را دارد؟
- پرداخت حقوق دو شرکت را با هم مقایسه کنید.

نکات زیر بین اوسط و انحراف معیاری در منحنی نورمال صدق می‌کند.



- اگر $\bar{x}$ اوسط و S انحراف معیار باشد در حدود 68% موارد مورد بررسی در فاصله $(\bar{x}-S,\ \bar{x}+S)$ یعنی به فاصله یک انحراف معیاری در اطراف اوسط قرار دارد.
- حدود 96% از موارد بررسی در فاصلهٔ $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ یعنی به فاصلهٔ دو انحراف معیاری در اطراف اوسط قرار می‌گیرند.

- حدود99% از موارد مورد بررسی در فاصلهٔ $(\bar{x}-3S,\bar{x}+3S)$ یعنی انحراف معیاری در اطراف اوسط قرار می گیرند.
- در یک منحنی نورمال انحراف بیش از $2S$ غیر عادی و انحراف بیش از $3S$ بسیار غیر عادی می‌باشد. data که بیش از $3S$ از اوسط فاصله داشته باشند باید به عنوان یک data تیت و پرک تلقی گردد.

مثال: اگر اوسط معاش کارمندان یک مؤسسه برابر مبلغ 12500 افغانی و انحراف معیاری برابر 700 افغانی باشد:

الف) با استفاده از فیصدی‌های توزیع نورمال، توزیع معاش داده شده را شرح دهید.

ب) آیا معاش معادل 1400 افغانی غیر عادی است؟ چرا؟

حل الف) ابتدا مقادیر $\bar{x}\pm S,\bar{x}\pm 2S$ و $\bar{x}\pm 3S$ را محاسبه می کنیم.

فیصدی	فاصله بر حسب افغانی	فاصله بر حسب S
68%	11800-13200	$\bar{X}\pm S$
96%	11100-13900	$\bar{X}\pm 2S$
99.6%	10400-14600	$\bar{X}\pm 3S$

حل ب: ابتدا $1400-\bar{x}$ را حساب می کنیم که برابر است با 1500 یعنی معاش 1400 افغانی به اندازهٔ 1500 افغانی بیشتر از اوسط است. حال اگر این رقم را به S تقسیم کنیم داریم:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

بنابر این، معاش 1400 افغانی معاش غیر عادی است؛ زیرا به اندازهٔ بیش از 2S بالاتر از $\bar{x}$ قرار دارد.

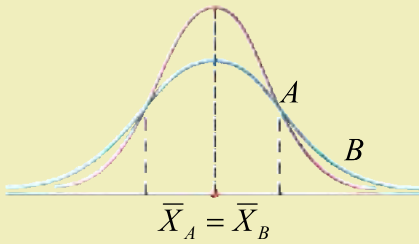


تمرین

هرگاه 68.28% مشاهدات در انتروال $(x-s\ ,\ x+s)$ قرار داشته باشد، آیا 95.45% و 99.73% از مشاهدات در کدام انتروال ها قرار دارند؟ انتروال ها را با منحنی نورمال مشخص کنید.

شاخص‌های شکل توزیع نورمال

در شکل مقابل اوسط‌ها با هم برابر اند در بارهٔ پراگنده‌گی در اطراف اوسط چه فکر می‌کنید؟



دو شاخص تمایل مرکزی و پراگنده‌گی به میزان زیادی *data* مربوط به یک مجموعه *data* احصاییوی را به صورت خلاصه انعکاس می‌دهند.

برای دانستن آن که یک مجموعه *data* احصاییوی متناظر و دارای اشارهٔ مثبت و منفی باشند ازب شاخص‌های اوسط و انحراف معیاری در شکل نورمال می‌توان بهتر استفاده نمود.

فعالیت

- در یک توزیعی نورمال شاخص‌های میانه، اوسط و مود چه وقت باهم مساوی هستند؟
- اگر توزیعی در اطراف اوسط متناظر نباشد در بارهٔ کمیت‌های اوسط میانه و مود چه فکر می‌کنید؟
- اگر یک توزیعی متناظر باشد، تفاضل بین اوسط و میانه مساوی به چیست؟
- اگر دو توزیع دارای اوسط یکسان و متناظر باشند، از نگاه بلندی و پخشی چه وضعیت را دارند؟

شاخص‌های شکل توزیع را می‌توان به دو حالت مطالعه نمود:

1- **شاخص خمیده‌گی**(skewness): توزیعی که در اطراف اوسط متناظر نباشد خمیده‌گی گفته می‌شود. این شاخص را توسط دو ضریب زیر نشان می‌دهند.

الف) ضریب خمیده‌گی: شاخصی است که برای تعیین میزان خمیده‌گی به کار می‌رود. و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^3}{S^3}$$

α_3 یک عدد مطلق است که برای مقایسه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر $\alpha_3 = 0$ توزیع متناظر، اگر $\alpha_3 > 0$ توزیع دارای خیمده گی مثبت واگر $\alpha_3 < 0$ توزیع دارای خمیده گی منفی است.

ب) ضریب خمیده‌گی پیرسون: ضریب پیرسون به صورت زیر تعریف می‌شود: $SK_{(P)} = \frac{3(\overline{x} - med)}{S}$

در توزیع متناظر ضریب خمیده‌گی پیرسون برابر صفر است،کمیت‌های مثبت و منفی ضـریب خمیـده‌گـی پیرسون به ترتیب نشان دهندهٔ خمیده‌گی مثبت و یا منفی توزیع است.

2- **شاخص کشیده‌گی**(kurtosis)**:** شاخص کشیده‌گی نشان دهندهٔ آن است که یک توزیع چه وقت دارای اوج و چه وقت دارای پخشی می‌باشد. ضریب کشیده‌گی معمول‌ترین شاخصی است که برای اندازه گیری کشیده‌گی به کار رفته و به صورت زیر تعریف می‌شود:

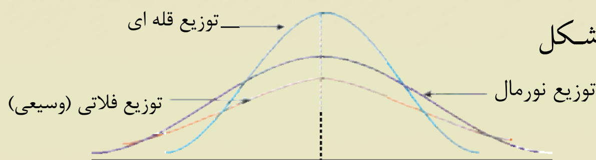
$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})}{S^4}$$

اگر جدول کثرت را در دست داشته باشیم پس فورمول شاخصی کشیده‌گی $\frac{\frac{1}{n}\sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$ است

که f_i فریکونسی x_i دیتا ، $\bar{x}$ اوسط و S انحراف معیاری است.

شاخص کشیده‌گی بسته‌گی به موقعیت و پراگنده‌گی توزیع ندارد. این شاخص برای مقایسه مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید؛ ضریب α_4 را با توجه به عدد 3 و خمیـده‌گـی و کـشیده گـی شکل داده شده مقایسه و توضیح دهید.



حل: توزیعی نورمال به طور معمول به عنوان استانداردی برای مقایسه میزان کشیده‌گی یـک توزیـع مـورد استفاده قرارمی‌گیرد. برای توزیع نورمال α_4معادل 3 است. اگـر α_4بیـشتر از 3 باشـد، کـشیده‌گـی یـا اوج توزیع به نسبت بیشتر از نورمال است.

به عبارت دیگر، توزیع قله‌یی است. اگر α_4 کمتر از 3 باشد کشیده‌گی یا اوج توزیع کمتر از توزیع نورمال است که در این صورت توزیع را فلاتی(وسیع) می گویند.

تمرین

1- نمرات مضمون ریاضی شاگردان یک صنف به صورت زیر داده شده است.

تعداد شاگردان	4	6	10	4	4	2
نمرات	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100

ضریب خمیده‌گی پیرسون را محاسبه کنید.

جامعه‌های چند متحوله

اگر اندازهٔ قد یک هم‌صنفی تان را بدانید. آیا مقدار وزن او را با توجه به اندازهٔ قد اش حدس زده می‌توانید؟



فعالیت

- آیا شما در درس‌های قبلی اندازهٔ قد و مقدار وزن اشخاص را همزمان مطالعه و بررسی کرده اید؟
- آیا می‌توان اندازهٔ قد و مقدار وزن یک شخص را به حیث یک متحول ارائه نمود؟
- اگر بخواهیم اندازهٔ قد و مقدار وزن شاگردان یک صنف را همزمان مورد مطالعه قرار دهیم، جامعه‌یی که مورد بررسی قرار می‌دهیم باید چه نوع جامعه باشد؟
- قد و وزن ده نفر از هم‌صنفی‌های خود را اندازه نمایید.
- data به دست آمده را به صورت جوره‌های مرتب بنویسید.
- نقاطی که توسط جوره‌های مرتب در مستوی مشخص می‌گردد، ذریعهٔ یک خط وصل کنید.
- گفته می‌توانید خطی که از وصل نقاط مستوی حاصل می‌گردد چه نوع شکل را دارد؟

از فعالیت بالا فهمیده می‌شود که موضوع مورد بحث، دو نوع متحول است. تاکنون در درس‌های قبلی جوامعی را بررسی کرده‌ایم که در آن‌ها فقط یک متحول وجود داشت. حال جوامعی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دارای دو متحول و یا چند متحول باشند.

برای آسانی کار به طور معمول ارتباط بین دو یا چند متحول را به وسیلهٔ معادلات ریاضی با توجه به سیستم کمیات وضعیه قایم ارائه می‌دارند.

در قدم اول به منظور تشخیص و تشکیل معادلات مورد ضرورت معلومات لازم جمع آوری می‌گردد.

در قدم دوم، معلومات جمع‌آوری شده به شکل ارزش متحول‌های مورد مطالعه در یک مستوی مختصات قایم، نقطه گذاری می‌گردد. شکلی که از وصل این نقاط به دست می‌آید یک گراف را به ما می‌دهد.

مثال: یک متخصص، تأثیر نوعی رژیم غذایی را روی یک تعداد خرگوش‌ها بررسی کرده است، بدین سبب وزن اولیهٔ هر خرگوش را اندازه گرفته و سپس عملیهٔ رژیم غذایی را بالای آن‌ها تطبیق و دوباره وزن آن ها را اندازه نموده است. دیتاهای به دست آمده عبارت اند از:

$$(1,8),(2,3),(1,7),(3,5),(2,4)$$

در این‌جا مختصهٔ اول بیانگر وزن اولیه و مختصهٔ دوم بیانگر وزن همان خرگوش پس از اعمال رژیم غذایی است.

- data بالا را به صورت جدول سطری و ستونی ترتیب کنید.
- اگر data ی بالا را به عنوان یک جامعه فرض نماییم، آیا این جامعه دارای چند متحول است؟

حل: جدول سطری زیر را در نظر می گیریم:

5	4	3	2	1	شماره خرگوش‌ها
2	3	1	2	1	وزن اولیه خرگوش‌ها
4	5	7	3	8	وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی خرگوش‌ها

جدول ستونی زیر را در نظر می گیریم:

وزن بعد از رژیم	وزن اولیه	شماره خرگوش ها
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

data بالا یک جامعهٔ دو متحوله را معرفی می‌نماید.

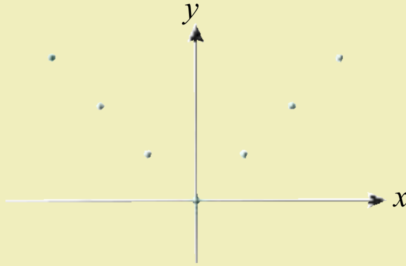


تمرین

1- برای بلند بردن محصولات زراعتی فکتورهای، از قبیل اندازهٔ آب، اندازهٔ کود کیمیاوی، نوع کود، اندازهٔ آفتاب و نوع خاک مؤثر اند، گفته می‌توانید که حد اقل با چند نوع متحول سروکار داریم؟

گراف پراگنده‌گی

Scater Diagram



شکل را نگاه کنید با توجه به نقاطی که در مستوی سیستم مختصات مشخص شده است این نقاط را به صورت جوره‌های مرتب ترتیب و معادلات ریاضی آن را بنویسید.

فعالیت

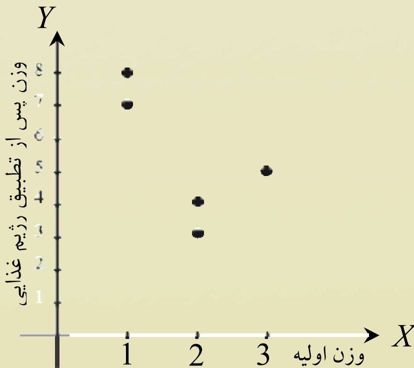
جوره‌های مرتب $(4,5),(3,4),(2,3),(1,2)$ داده شده است.

- گراف این جوره‌های مرتب را به طور دقیق رسم کنید.
- نقاط مشخص شده را با هم وصل و معادلهٔ آن را دریافت کنید. اکنون مطابق دستورالعمل زیر، مختصهٔ دوم هر یک از این data را به صورت زیر تغییر دهید.
  - برای هر نقطه‌یی سکه را پرتاب کنید. اگر شیر آمد به y یک واحد اضافه کنید و اگر خط آمد از y یک واحد کم کنید با تغییرات حاصل شده گراف آن را رسم کنید.
- این عملیه را تکرار کنید؛ اما این بار قیمت‌های را که اضافه و یا کم می‌کنید تغییر ندهید وابسته‌گی x و y چگونه تغییر می‌کند؟

مثال

جوره‌های مرتب زیر را که از تأثیر رژیم غذایی خرگوش‌ها در مثال قبلی یاد آوری نموده بودیم در نظر می‌گیریم:

$$(1,8)\ ,\ (2,3)\ ,\ (1,7)\ ,\ (3,5)\ ,\ (2,4)$$



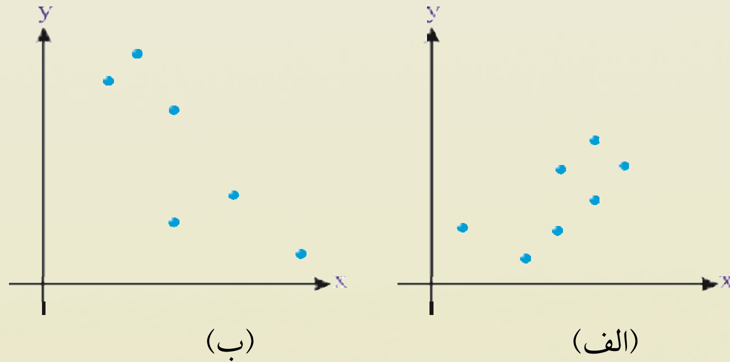
این جوره‌های مرتب را در مستوی به صورت شکل مقابل نشان می‌دهیم.

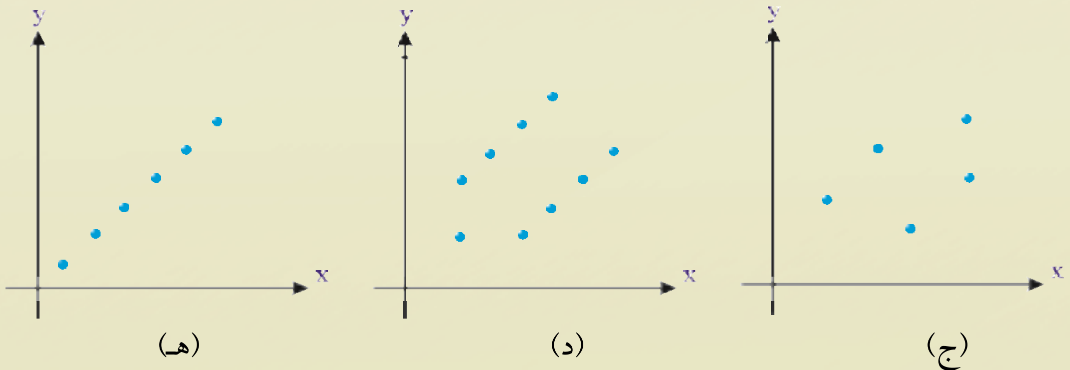
گراف فوق که وزن موش‌ها را نشان می‌دهد به نام گراف پراگنده‌گی یا پراکنش یاد می‌کنند.

گراف پراکنش مجموعه یی از نقاط در مستوی محورهای مختصات است که از رسم data مربوط به اندازه گیری در جامعه‌های دو متحوله به دست می‌آید.

مطالعهٔ این گراف می‌تواند اطلاعات در بارهٔ جامعه در اختیار ما بگذارد.

مثال: گراف‌های زیر را در نظر بگیرید:

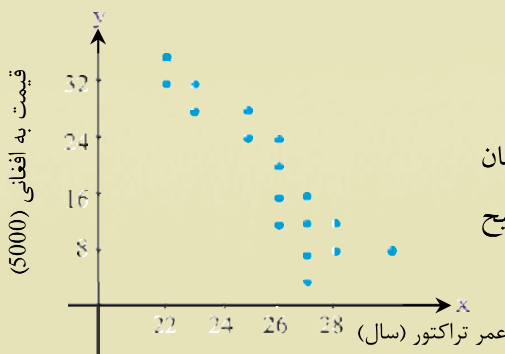




در گراف (الف) دیده می‌شود که قیمت‌های روی محور x ها افزایش می‌یابد، قیمت‌های روی محور y ها نیز افزایش می‌یابد؛ اما در گراف (ب) بر عکس است؛ با افزایش قیمت‌ها روی محور x ها قیمت ها روی محور y ها کاهش می‌یابد.

در گراف (ج) تغییرات در قیمت x ها هیچ‌گونه اطلاعی در بارهٔ تغییرات y نمی بینیم؛ یعنی رفتار قیمت x رفتار قیمت y را مشخص نمی‌کند.

گراف (د) علاوه بر آن که نشان می‌دهد دو متحول با هم افزایش و یا کاهش می‌یابند، با داشتن قیمت x با دقت بیشتری می‌توان y را حدس زد. دقت حدس زدن قیمت y در این گراف از دقت حدس در گراف (الف) و (ب) بیشتر است در گراف (هـ) حدس قیمت y با دقت بیشتری انجام می‌شود.

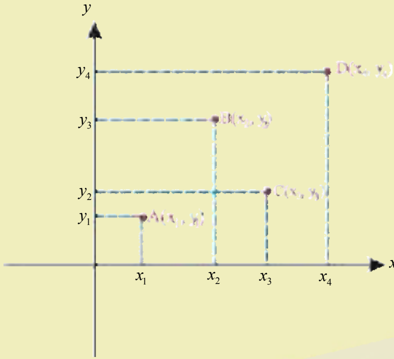


تمرین

در گراف مقابل، قیمت و عمر یک تعداد تراکترها را نشان می‌دهد، آیا ارتباط بین این دو متحول وجود دارد؟ توضیح دهید.

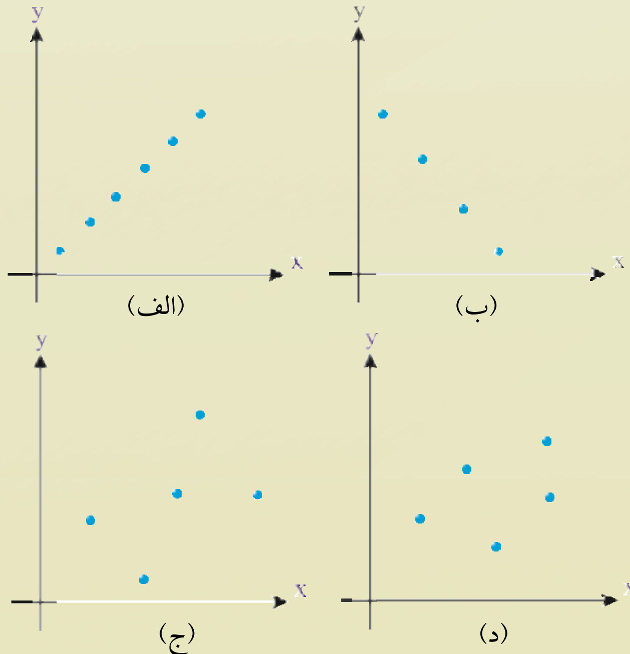
همبسته‌گی و ضریب همبسته‌گی

نقاط A، B، C و D مانند شکل مقابل داده شده است آیا ممکن است که نقاط را توسط یک خط مستقیم باهم وصل نمود؟ چرا؟



فعالیت

- شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



- آیا در شکل (الف) و (ب) می‌توان متحول y را به کمک خطی که از این نقاط می‌گذرد، تعیین نماییم؟
- میزان ارتباطات در شکل (الف) و (ب) بین x و y چگونه است؟
- آیا در شکل (ج) و (د) می‌توان خطی را تعیین کرد که همه نقاط روی آن قرار داشته باشند؟
- میزان ارتباطات در شکل (ج) و (د) بین x و y چگونه است؟
- میزان ارتباطات شکل (الف) و (ب) را با شکل (ج) و (د) مقایسه نموده و بگویید که خطای متحول y به کمک متحول x در کدام شکل بیشتر است؟

از فعالیت بالا فهمیده می‌شود که اگر نقاط به شکل یک خط مستقیم هر قدر که نزدیکتر باشد خطای متحول y نظر به x کمتر است. و برعکس هر قدر که از خط دورتر باشند خطای y بیشتر است؛ بنابر این روش را می‌خواهیم معرفی نماییم که همبسته‌گی نقاط را اندازه گیری نماید.

دستور یا فورمول که برای محاسبهٔ همبسته‌گی معرفی شده است به نام ضریب همبسته‌گی یاد می‌کنند و آن را با سمبول r به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$r = \frac{\frac{\text{مجموعه حاصل ضرب x ها و y ها}}{n} - (\text{اوسط y ها})(\text{اوسط x ها})}{(\text{انحراف معیار y ها})(\text{انحراف معیار x ها})} = \frac{\sum \frac{xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{s_x s_y}$$

مثال: data مربوط به وزن اولیه و وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی خرگوش‌ها را مانند جدول زیر در نظر بگیرید.

حاصل ضرب x و y	وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی (y)	وزن اولیه (x)	شماره خرگوش‌ها
8	8	1	1
6	3	2	2
7	7	1	3
15	5	3	4
8	4	2	5
$\sum 44$	$\sum 27$	$\sum 9$	

ضریب همبسته‌گی بین وزن اولیه و وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی را محاسبه کنید.

حل: اگر x ها وزن اولیه، y ها وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی و $n=5$ تعداد موش ها باشد؛ دراین صورت، برای محاسبه اوسط x ها و y ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \qquad \bar{y} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$S^2{}_x = \text{واریانس x ها} = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \text{واریانس y ها} = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{مجموعهٔ حاصل‌ضرب x ها و y ها}}{\text{مجموعهٔ data}} = \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{(1\cdot 8)+(2\cdot 3)+(1\cdot 7)+(3\cdot 5)+(2\cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

در نتیجه: $r = \text{ضریب همبسته گی} = \frac{10.2-(1.8)(5.6)}{0.74\cdot 1.86} = \frac{0.12}{1.376} = 0.09$

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا ضریب همبسته‌گی 0.09 را که در بالا به دست آوردیم نشانی از همبسته گی زیاد بین x و y است و یاخیر؟

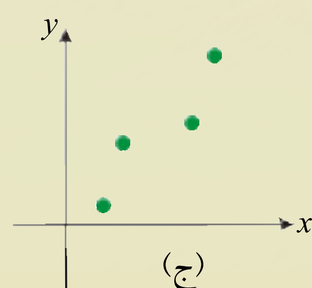
برای این‌که بتوانیم به این سؤال پاسخ دهیم ضریب همبسته‌گی را در چند حالت زیر ذریعهٔ مثال توضیح می کنیم.

مثال: جدول و گراف‌های مربوط آن‌ها را طوری زیر در نظر می گیریم:

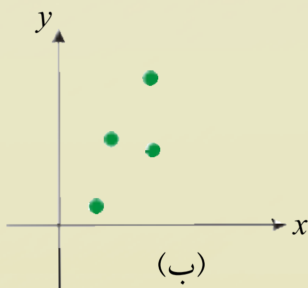
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

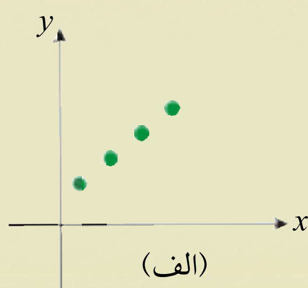
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

در شکل(الف) نقاط به طور کامل روی خط قرار دارند؛ پس باید بالاترین ضریب همبسته گی را داشته باشد.

در شکل(ب) نقاط از خط مستقیم دورتر شده اند؛ پس باید ضریب همبسته گی آن از ضریب(الف) کمتر باشند.

در شکل(ج) نقاط از خط، دور شده است؛ ولی به اندازهٔ دوری حالت(ب) نیست؛ پس باید ضریب همبسته گی در این حالت از ضریب همبسته‌گی در حالت(ب) بیشتر؛ ولی از ضریب همبسته‌گی حالت(الف) کمتر است. حال محاسبهٔ صحت مطالب بالا را قرار زیر امتحان و بررسی می کنیم:

- ضریب همبسته گی در حالت (الف): $\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$ $\quad \bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5$

$$S^2{}_x = \text{واریانس x ها} = \frac{(1.5)^2+(0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{واریانس } y \text{ ها} = \frac{3^2+1^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{مجموعه حاصل‌ضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 3+10+21+36 = 70$$

$$\text{ضریب همبسته گی} = \frac{70/4-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

- ضریب همبسته گی درحالت (ب):

$\bar{x} = 2.5$ $\quad$ $\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$

واریانس $x = 1.25$ $\quad$ واریانس $y = \frac{16+0+0+16}{4} = 8$

$$\text{مجموعه حاصل‌ضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها} = 2+12+18+40 = 72$$

$$\text{ضریب همبسته گی} = \frac{72/4-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

- ضریب همبسته گی درحالت (ج):

$\bar{x} = 2.5$ $\quad$ $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$

واریانس $x = 1.25$ $\quad$ واریانس $y = 4.6875$

$$\frac{\text{مجموعه حاصل‌ضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها}}{4} = 16.75$$

$$\text{ضریب همبسته گی} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

به خاطر داشته باشید در شرایط که y کمترین خط را داشته باشد(مقادیر y و x روی یک خط قرار دارند.)
ضریب همبسته گی 1 و 1- است و در سایر شرایط ضریب همبسته گی بین این دو مقدار قرار دارد.



تمرین

1- data زیر را در نظر بگیرید.

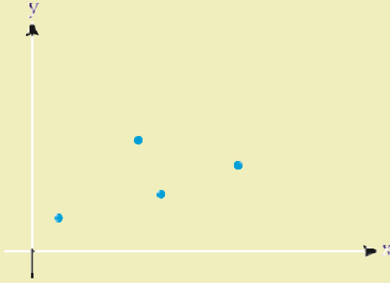
x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

ضریب همبسته گی این داده ها را محاسبه کنید.

2- ضریب همبسته گی قد و وزن همصنفی‌های خود را حساب کنید

خط رگرسیون

Regression

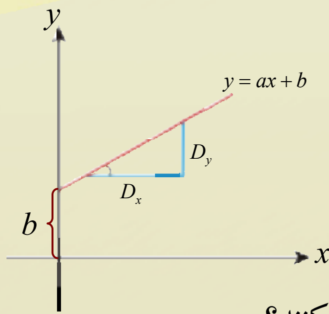


فرض کنیم گراف پراکنش در شکل مقابل داده شده است:

خطی مستقیمی را که به صورت معادله $y = ax + b$ است از بین این نقاط بگذرانید که به همه نقاط نزدیک باشد.



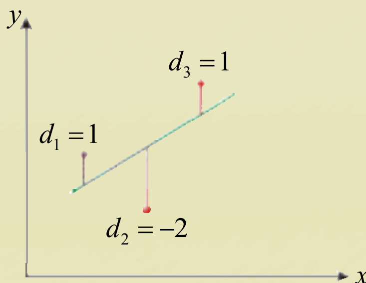
فعالیت



در شکل مقابل، تابع خطی ساده(درجه یک) که به صورت خطی مستقیم است ترسیم شده است.

- در تابع خطی $y = ax + b$, a و b چه نوع مقادیر استند؟
- در تابع $y = ax + b$ متحولین x و y را به نام چه یاد می کنند؟
- میل خط مستقیم $y = ax + b$ را دریافت کنید.
- در معادلهٔ $y = ax + b$ میزان تغییرات y را برای یک واحد تغییر در x مشخص کنید.
- در معادلهٔ $y = ax + b$ اگر ضریب $a > 0$ باشد گراف تابع متزایداست یامتناقص؟برعکس اگر $a < 0$ باشدگراف تابع چه شکل را دارد ؟همچنان اگر $a = 0$ باشد شکل تابع را مشخص کنید.

– شکل مقابل را در نظر بگیرید.



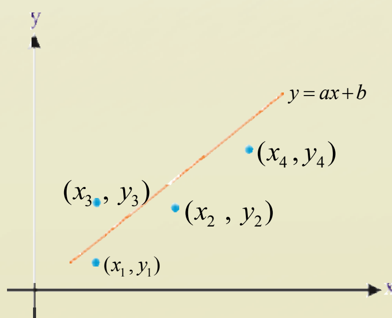
- مجموع فاصله‌های $d_1 + d_2 + d_3$ و $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ را محاسبه کنید.

از فعالیت بالا فهمیده می‌شود که معادلهٔ $y = ax + b$ یک تابع خطی است که ضریب a میل این معادله می‌باشد. هنگامی که a مثبت باشد؛ خط مستقیم متزاید و a منفی باشد؛ خط مستقیم

متناقص است. توجه داشته باشید که اگر مقادیر (x,y) معادله $y = ax+b$ را صدق نماید در این صورت تمام این نقاط روی خط مستقیم قرار دارند.

هر قدر نقاط گراف پراگنده‌گی به خط مستقیم نزدیکتر باشند ضریب همبسته‌گی به 1+ و 1- نزدیکتر خواهد بود. اگر معادلهٔ خط مستقیم را داشته باشیم و بدانیم که ضریب همبسته‌گی مناسب است می‌توان متحول y را به کمک متحول x تعیین کرد و در صورتی که خط مستقیم را نداشته باشیم، این خط را می‌توان توسط روشی که به نام کمترین مربعات یاد می‌شود به صورت زیر دریافت کرد:

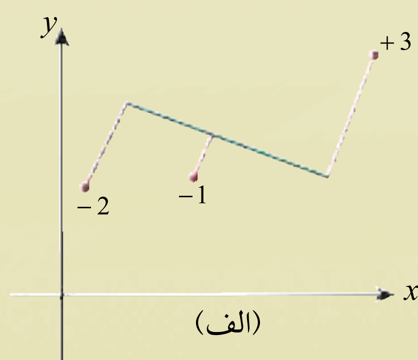
فرض کنیم گراف پراگنده‌گی به شکل مقابل داده شده است:



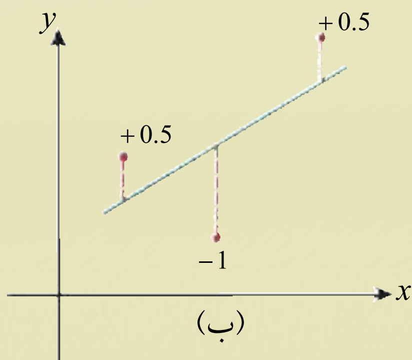
می خواهیم خطی به معادلهٔ $y = ax+b$ از بین نقاط بگذاریم به قسمی که به همه نقاط نزدیک باشد. در این روش معادلهٔ خط به شکل مناسب (ارزنده) طوری باید تشکیل شود که مجموع توان دوم انحراف‌های عمودی از خط مستقیم حد اقل باید (Minimum) باشد. پیش از ارائهٔ فرمول، مثال زیر را در نظر می گریم؛ فرض کنید data های زیر داده شده:

x	1	5	9
y	6	5	7

در شکل زیر دو خط مختلف را برای این دیتا ها رسم می‌کنیم و خطای خطوط را از مشاهدات مشخص می‌نماییم:



(الف)



(ب)

واضح است که خط رسم شده در حالت (ب) به مراتب بهتر از حالت (الف) است درهر دو حالت (الف) و (ب) جمع الجبری خط ها برابر صفر می‌شود.

حالت الف: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ جمع الجبری خطاها

حالت ب: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ جمع الجبری خطاها

چون در هر دو حالت حاصل جمع صفر است؛ بنابراین گفته نمی‌توانیم که کدام خط مناسبتر است. برای این که خطاهای مثبت و منفی همدیگر را خنثی نکند می‌توانیم هر خط را به توان 2 رسانیده سپس آن‌ها را جمع کنیم.

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ مجموع توان‌های خط دوم

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$ مجموع توان‌های خط دوم

بنابر این، مجموع توان‌های خط دوم ها در حالت (ب) کمتر از حالت (الف) است؛ پس گفته می‌توانیم:

بهترین خط مناسب خطی است که مجموع مربعات خط هایش از بقیه خطوط ممکن دیگر کمتر باشد، چنین خطی را (خط رگرسیون) می گویند.

اگر فرق بین مقداری که به وسیلهٔ خط رگرسیون و مقدار مشاهدات y به دست می‌آید به $\bar{y}$ نشان دهیم؛ در این صورت، برای حد اقل ساختن مجموع توان‌های دوم می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

$$\text{مجموع توان‌های خطهای دوم} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum \left[y-(ax+b)\right]^2$$
$$= \sum (y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + \ldots$$

در این جا x و y ثابت و a و b متحول اند.

ما بدون آن‌که وارد روش‌های ریاضی محاسبه a و b شویم فقط به ذکر دستور محاسبهٔ آن‌ها می‌پردازیم.

$$a = r \quad \frac{S_y}{S_x} = \text{ضریب همبسته‌گی} \cdot \frac{\text{انحراف معیاری } y}{\text{انحراف معیاری } x}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad , \qquad b = \frac{\sum xy - n\bar{x}y}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

محاسبه a و b به روش کمترین مربعات می‌باشد.

نتیجه: خط رگرسیون وسیله یا ابزاری است برای پیشبینی مقدار یک متحول بر حسب متحول دیگر که به آن وابسته است.

مثال: data زیر را در نظر بگیرید.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

خط رگرسیون y نسبت به x را دریافت کنید.

حل: چون:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{4+3+2+1+0}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_x{}^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{2}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=2 \quad \Rightarrow \quad S_x=\sqrt{2}$$

$$S_y{}^2=\frac{\sum (y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=2 \quad \Rightarrow \quad S_y=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n}=\frac{4+6+6+4+0}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-(\bar{x})(\bar{y})}{s_x\cdot s_y}=\frac{\frac{1}{5}(4-(6))}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4-6}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

بنابراین:

$$a=r\frac{s_y}{s_x}=\frac{(-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

$$b=\bar{y}-a\,\bar{x}=2-(-1)3=2+3=5$$

پس معادلهٔ خط رگرسیون عبارت است از: $y=ax+b \quad \Rightarrow \quad y=-x+5$.



تمرین

اگر $y=2x+3$ معادلهٔ خط رگرسیون y نسبت به x و اوسط x برابر 2 باشد اوسط y چقدر است؟

نکات مهم فصل

ضریب تغییرات: ضریب تغییرات بدون واحد است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیاری}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

این ضریب را اغلب به صورت فیصدی می‌نویسند که به نام ضریب متحول یاد می‌شود؛

یعنی: $CV = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$

ضریب تغییرات برای data مثبت تعریف می‌شود و به یاد داشته باشید که اگر data مساوی باشد همه شاخص‌های پراگنده‌گی صفر می‌شود.

پراگنده‌گی در منحنی نورمال: منحنی نورمال وسیلهٔ مهم برای توصیف از مجموع‌های آماری است. در توزیع نورمال درحالتی که داده ها دارای توزیعی نورمال و منحنی کثرت متناظر باشد، واریانس نقشی عمده‌یی دارد. در واقع با مشخص بودن دو پارامتر اوسط و انحراف معیاری در توزیع نورمال، این توزیع در کل مشخص خواهد بود و محاسبهٔ هر نوع شاخص مساعد است.

شاخص‌های شکل توزیع نورمال: به کمک اوسط و انحراف معیاری می‌توان چگونه‌گی data را به شکل شاخص خمیده‌گی و شاخص کشیده‌گی بهتر توضیح و ارائه نمود.

شاخص خمیده‌گی توسط ضریب خمیده‌گی α_3 و ضریب پیرسون SK_P که برای اندازه گیری و مقایسهٔ اندازه گیری مورد استفاده قرار می گیرند به صورت زیر می‌نویسند:

$$Sk_p = \frac{3(\bar{x} - med)}{S} \qquad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

شاخص کشیده‌گی توسط ضریب کشیده‌گی α_4 اندازه گیری و مقایسه می گردد.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

این شاخص بسته‌گی به موقفیت و پراگنده‌گی توزیع ندارد.

جامعه‌های چند متحوله: یکی از اهداف عمده در اکثر تحقیقات احصائیوی پیشبینی و پیش گویی و تعیین یک متحول از جنس متحول دیگر است. زمانی که ارتباط بین دوشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. منظور از جامعهٔ دو متحوله می‌باشد.

مانند رابطه بین حجم و فشار گاز، ارتباط بین صحت و میزان مرگ ومیر رابطه بین سطح کشت و مقدار محصول، رابطه بین شعاع دایره و مساحت آن همهٔ این‌ها روابط بین دو متحول را بیان می‌نماید. برای سهولت، به طور معمول ارتباط بین دو یا چندین متحول را به وسیلهٔ معادلات ریاضی ارائه می‌دارند.

گراف پراکنش: برای ترسیم گراف پراکنش داده‌ها را به صورت جوره‌های مرتب، ارائه و توسط نقاط در یک مستوی محورهای مختصات نمایش می‌دهیم.

گراف پراکنش می‌تواند سه نوع اطلاعات را در اختیار ما قرار دهد.

الف) نمونه‌یی که نشان دهندهٔ نوعی ارتباط بین مشاهدات باشد موجود است یا نه؟

ب) در صورت موجودیت نوعی ارتباط، آیا ارتباط خطی است یا غیر خطی؟

ج) در صورتی که رابطه خطی باشد نوع ارتباط چگونه است؟

همبسته‌گی و ضریب همبسته‌گی: همبسته‌گی به سنجش و دریافت درجهٔ ارتباط بین متحوله‌ها می‌باشد. ارتباط بین متحول‌ها می‌تواند به صورت خطی توسط یک خط مستقیم و یا به صورت غیر خطی به وسیلهٔ یک منحنی ارائه گردد. همبسته‌گی به طور عموم به دو صورت مثبت و منفی بین دو متحول بیان می‌شود اگر اندازهٔ دو متحول در یک جهت تغییرکند؛ یعنی x و y هر دو بزرگ یا هر دو کوچک شوند همبسته‌گی مثبت(خط مستقیم) است.

بهترین معیاری تشخیص وجود همبسته‌گی یاعدم آن و حتی نوع، جهت و میزان همبسته‌گی خطی ضریب همبسته‌گی است که توسط فورمول زیر ارائه می‌گردد.

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-(\bar{x})(\bar{y})}{s_x\cdot s_y}$$

در روابط بالا $\sum xy$ مجموع حاصل ضرب xها و y ها، $\bar{x}$اوسط xها، $\bar{y}$ اوسط y ها، S_x انحراف معیاری x ها و S_y انحراف معیاری y ها می‌باشند.

خط رگرسیون: رگر سیون(تخمین)، سنجش و دریافت ارزش یک متحول تابع نظر به ارزش یک یا چند متحول مستقل می‌باشد.

معادله‌یی که ارتباط بین متحول ها را افاده می‌نماید به نام معادله‌یی رگرسیون یا معادلهٔ سنجش یاد می‌گردد و این معادله را می‌توان به روش کمترین مربعات محاسبه و ضرایب a و b را به کمک این روش به صورت زیر به دست آورد.

$$a=r\ \frac{S_y}{S_x}$$

$$b=\bar{y}-a\bar{x}$$

در اینجا S_y انحراف معیاری y، S_x انحراف معیاری x ، r ضریب همبسته‌گی، $\bar{x}$ اوسط xها و $\bar{y}$ اوسط y ها می‌باشند.

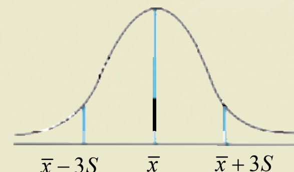


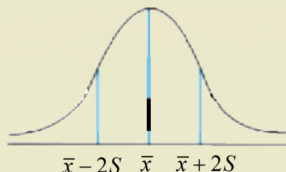
تمرین فصل هشتم

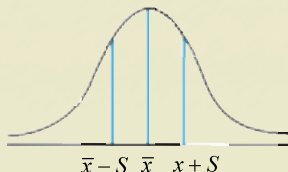
1- اگر در یک جامعه اوسط آن $\bar{x} = 50$ و واریاسن آن $S^2 = 64$ باشد ضریب تغییرات y که بر طبق رابطه $y = 2x + 10$ از متحول x پیروی می کند چقدر است؟

2- اگر 20% نمره به نمرهٔ هر متعلم اضافه شود چه تاثیری روی ضریب تغییرات نمره حاصل می‌شود؟

3- فیصدی از جامعه که میان منحنی‌های زیر قرار دارد بنویسید.







4- با توجه به روابط زیر بگویید که کدام یک از این روابط، جامعهٔ یک متحوله، دو متحوله و سه متحوله را نشان می‌دهد.

الف) اندازهٔ قد همصنفی‌های شما　　　ب) ارتباط بین مصرف مجموعی و قیمت متاع

ج) ارتباط بین حجم استوانه و شعاع قاعده و ارتفاع آن

5- تعداد ساعات صرف شده و نمرات که شاگردان یک صنف از قرار 20% اخذ نموده است به شکل جوره‌های مرتب در زیر آورده شده است:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)

(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)

(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

گراف پراکنش را برای نشان دادن رابطه بین تعداد ساعات مطالعه و نمرهٔ امتحان رسم کنید. چه نتیجه‌یی می گیرید؟

6- Data (داده‌های) زیر را در نظر بگیرید.

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

ضریب همبسته گی دراین داده ها را محاسبه کنید.

7- اگر ضریب همبسته گی به صفر نزدیکتر باشد.آیا خطای y بیشتر است یا کمتر؟

8- اگر ضریب همبسته گی 1+ و 1- نزدیکتر باشد دربارهٔ خطای y چه می گویید؟

9- نظر به یک سروی که در دوصنف A و B یک مکتب صورت گرفته اعدادزیر درمورد وزن 12 شاگرد به حساب کیلو گرام جمع آوری گردیده است.

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

با در نظرداشت اعداد بالا:

الف) گراف پراگنده‌گی داده ها را رسم نمایید.

ب) معادلهٔ خط مستقیم مربوط را به دست آورده ارزش‌های a و b را تعیین کنید.

ج) خط مستقیم مربوط را نظر به معادلهٔ رگرسیون رسم کنید.

10- اگر x و y دارای همبسته گی و معکوس باشند $S_x = S_y$ خط رگرسیون y نسبت به x کدام است؟

1) $y = \frac{1}{2}x + b$ 2) $y = \frac{1}{2}x + b$

3) $y = x + b$ 4) $y = -x + b$

11- گراف پراکنش نتایج امتحانات 20% مضمون ریاضی و مضمون فزیک 20 شاگرد که به شرح زیر آمده است رسم کنید.

شاگرد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
نمرهٔ ریاضی	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
نمرهٔ فزیک	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

شاگرد	12	13	14	15	16	17	18	19	20
نمرهٔ ریاضی	12	10	16	18	12	6	14	14	12
نمرهٔ فزیک	6	12	16	12	12	8	12	14	16

- معادلهٔ خط رگرسیون را به دست آورید.آیا ارتباط بین نتایج دو امتحان وجود دارد؟

12- تأثیر قرار گرفتن بقه ها در معروض محلول 1.5 فیصدهٔ نمک طعام بر میزان یون لاسما در بدن آن‌ها در جدول زیر ثبت شده است.

زمان قرار گرفتن در معروض نمک طعام(ساعت)	50	40	30	20	10	5	0
میزان یون پلاسما (mm)	136	132	126	122	118	10	90

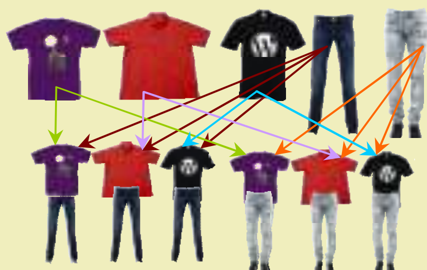
- در این جدول متحول ها را بررسی و بگویید کدام وابسته و کدام مستقل است؟
- گرافی رسم کنید که ارتباط بین دو متحول را نشان دهد.
- در رسم این گراف، متحول مستقل را روی محور افقی نمایش دهید.

فصل نهم
احتمالات



ترتیب
Permutation

اگر سه پیراهن و دو پتلون مختلف از هم داشته باشید به چند شکل می‌توانید آن‌ها را بپوشید؟



فعالیت

- سه تن از هم‌صنفان را انتخاب نموده به چند شکل می‌توانید، آن‌ها را در یک قطار ایستاده نمایید.
- سه عدد اختیاری یک رقمی را در نظر گرفته با استفاده از آن چند عدد سه رقمی را می‌توان تشکیل داد؟
- با استفاده از اعدادی که در بالا انتخاب نموده اید، چند عدد سه رقمی می‌توانیم تشکیل نماییم که در آن تکرار رقم نباشد؟
- نتایج پاراگراف اول، دوم و سوم فعالیت فوق را باهم مقایسه نموده بگویید با هم چه رابطه دارند؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می‌آوریم:

نتیجه: تعداد n عنصری که بایک ترتیب مشخص پهلوی هم قرار می گیرند عبارت است از:

در صورتی که تکرار مجاز نباشد؛ مساوی است به $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot1$

در صورتی که تکرار مجاز باشد؛ مساوی است $n\cdot n\cdot\underbrace{\ldots\ \cdot n}_{n \text{ دفعه}}=n^n$

تعریف

1- برای یک عدد طبیعی n حاصل ضرب $(1\cdot2\cdot3\ \ldots n)$ را به صورت مختصر به $n!$ (که n فکتوریل خوانده می شود) نشان می‌دهند قرار تعریف $0!=1$ و $1!=1$ است.

2- تعداد ترتیب n عنصرتحت یک شرط که به نام پرمو تیشن (permutation) n عنصر نیز یاد می گردد به P_n (در صورتی که تکرارمجاز یا ممکن نباشد.)

نشان داده مساوی است به: $P_n=n!$

و در صورتی که در ترتیب تکرار مجاز و یا مطلوب باشد، در این صورت تعداد ترتیب ها و یا پرموتیشن‌های با تکرار را به $P_n^{(k)}$ نشان داده و چنین معنی می‌دهد که یک عنصر k مرتبه در n ترتیب تکرار گردیده است که با دقت به حالات بدون تکرار تعداد مجموعی عبارت است از:

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

مثال:

1- قیمت عددی !3، !5 و !8 را به دست آورید؟

2- نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n! = (n-1)\,n\,!$ است؟

حل 1: نظر به تعریف داریم: $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \;\ldots\; n\,!$

بنا بر این:

$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$
$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$
$$8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$$

حل 2: می‌دانیم که: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots n = (1\cdot 2\cdot 3 \ldots n-1).(n) = n(n-1)!.$

مثال 2: دریک سالون امتحان 16 شاگرداز صنوف مختلف بخاطر اخذ امتحان سویه گرد هم جمع گردیده اند.

به چند شکل می‌توانند روی 16 میز با هم بنشینند، در صورتی که تغییر محل هر شاگرد به حیث یک حالت در نظر گرفته شود.

حل: می‌دانیم که جواب !16 است که تکرار در آن ممکن نیست اما اگر تکرار مجاز و یا ممکن باشد، در این صورت مسأله عبارت از ترتیب ویا پرموتیشن n عنصر بوده که به تعداد k عدد آن به طور مثال تکراراً ظهور می‌نمایید در این صورت داریم:

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$$

مثلاً در مثال بالا هرگاه 16 شاگرد مذکور بخواهد با بکس‌های مکتبی خود جاهای خود را ریزرف نمایند و به تعداد 4 تن آن‌ها دارای بکس یکسان باشند عبارت است از:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16 = 43680$$

هرگاه عمومیت مسأله را در نظر بگریم، دراین صورت به تعداد $p_n^{(k_1,k_2,...k_n)}$ ترتیب ویا پرموتشین n عنصر که در آن مجاز و یا ممکن بوده و در حقیقت در گروپ که هر کدام آن $k_1,k_2,...k_n$ می‌باشد، داریم:

$$p^{(k_1,k_2,\ldots,k_n)}=\frac{n!}{k_1!,k_2!,k_3!,\ldots,k_n!}$$

مثال 3: از پنج عدد 4،4،5،5،5 به چند شکل می‌توانیم اعداد پنج رقمی تشکیل نماییم:

حل: تعداد اعداد عبارت است از:

$$P_3(2,3)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

و اعداد عبارت اند از:

$$55544\cdot 55454\cdot 54554\cdot 45554\cdot 45545$$
$$45455\cdot 44555\cdot 45455\cdot 54455\cdot 55445$$

مثال4: هر گاه شرکت ترانسپورتی "سبا کاروان"در لین کابل- جلال آباد 5 سرویس ولین جلال آباد- کنر3 عراده ملی بس داشته باشد، به چند شکل می‌توانیم توسط سرویس ازاین شرکت از کابل به کنر سفر نما ییم؟

حل: می‌دانیم امکانات انتخاب سرویس برای مسافر بین کابل- جلال آباد مساوی به 5 امکان بوده که در برابر هر امکان آن 3 امکان انتخاب ملی بس های شرکت مذکور وجود دارد؛ بنابراین کل امکانات مساوی‌است به: $5\times 3=15$

مثال5: با استفاده از ارقام 8،7،2 و 5 چند عدد سه رقمی (بدون تکرار) می‌توان نوشت؟

حل: با توجه به این‌که عدد سه رقمی است، سه محل خالی داریم که به صورت زیر امکان پر شدن آن توسط اعداد وجود دارد:

	محل رقم اول	محل رقم دو	محل رقم سوم
تعداد امکانات	4	3	2

می‌دانیم که در محل اولی 4 امکان انتخاب از اعداد داده شده وجود دارد، در نتیجه برای تکمیل محل دوم3 امکان انتخاب باقی می‌ماند؛ زیرا از 4 عدد داده شده یکی آن برای محل رقم اولی اشغال موقعیت نموده است، چون تکرار مجاز نیست؛ پس 3 امکان برای رقم دوم مجاز است به

همین ترتیب، برای موقعیت رقم سوم 2 امکان باقی مانده، که کل امکانات مساوی حالت می‌باشد.

و با توجه به فورمول داریم:

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 24$$



تمرین

1. چند عدد پنج رقمی و جود دارد رقم اول آن 2 و رقم اخیر آن 4 باشد و در عدد هیچ رقم تکراری وجود نداشته باشد.
2. به چند شکل 10 نفر می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند، طوری که از جمله دو نفر آن می‌خواهد در هر حالت کنار هم باشند.؟
3. به چند شکل می‌توان 3 توپ به رنگ سرخ، 2 توپ آبی 4 توپ زرد را کنار هم قرار داد؟ (ترتیب توپ‌های هم رنگ قابل حساب نیستند).

ترکیب‌ها
Combination



ترکیب اعداد 1 و 2 چیست؟

ترتیب اعداد 1 و 2 کدام است؟

از نظر شمار ترتیب و ترکیب از هم چه فرق دارند؟

قبل از آن که فعالیتی غرض آموزش درس انجام دهیم. تعریف زیر را که از آن در تکمیل فعالیت استفاده خواهیم کرد. در نظر می گیریم.

تعریف: طرز نوشته $\binom{n}{k}$ که به‌شکل n بالای k خوانده می‌شود و درحقیقت ضرایب بینوم بوده که عدد k در آن توان بینوم را مشخص نموده عبارت است از:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad , \quad k,n\in IN \quad , \quad 0\le k\le n$$

فعالیت

- با در نظر داشت تعریف فوق در انکشاف بینوم دو حده $(a+b)^2$ ضرایب بینوم مساوی $\binom{2}{k}$، $k=0,1,2$ بوده تعیین و مقایسه کنید؟

$$(a+b)^2=C_k^2a^{2-k}b^k=a^2+\square+ab+\square b^2$$

- ضرایب بینوم را در انکشاف بالا که در چوکات‌ها گرفته شده اند با طرز نوشته $\binom{2}{k}, k=0,1,2$ با قیمت‌های هر $n\in IN$ با هر حد انکشاف بینوم مقایسه کنید؟
- چون $\binom{2}{0}=\binom{2}{2}=1$ بوده نشان دهید که قیمت‌های $\binom{n}{n}$ و $\binom{n}{0}$ برای هر $n\in IN$ با هم مساوی به قیمت 1 است.
- قیمت ضریب حد دوم بینوم را در انکشاف $(a+b)^n$ از طریق $\binom{n}{k}$ حساب کنید.
- طرز نوشتهٔ $\binom{4}{k}$، $k=0,1,2,3,4$، ضرایب بینوم کدام انکشاف را نشان داده آن‌ها را بنویسید.

از انجام فعالیت بالا می‌توان نتیجهٔ زیر را به دست آورد.

نتیجه: برای هر عدد طبیعی n و k و $0 \le k \le n$ بوده داریم که:

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \qquad \text{(I)}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \qquad \text{(II)}$$

(III): تعداد ترکیب‌های r یک ست n عضوی عبارت از ترکیب با کمبنیشن r شی از n بوده که $C_{(r)}^{n}$ نشان داده شده و مساوی‌است به:

مثال: در یک مکتب به تعداد 7 صنف دهم و جود دارد. ادارهٔ مکتب می‌خواهد از جملهٔ هفت نفر، اول نمره‌های صنف دهم را به تعداد 4 نفر انتخاب نماید به چند شکل این انتخاب، صورت می گیرد؟

حل: دیده می‌شود در انتخاب 4 نفر از 7 نفر هیچ‌گونه برتری و ترتیبی در نظر نبوده، یعنی مهم نیست که اول نمره کدام صنف است، پس مسألهٔ ترکیب 4 نفر از 7 نفر شاگرد بوده که برای آن داریم:

$$C_{(4)}^{7}=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{6\cdot4!}=35$$

مثال2: اگر از بین 7 شاگرد، به تعداد 4 نفر را برای رهبری اتحادیهٔ شاگردان صنف دهم در یک تیم طوری انتخاب نماییم که در آن‌ها نفر اول رئیس، نفر دوم معاون، نفرسوم منشی و مسؤول مالی باشد در این‌صورت داریم.

دراین حالت، چون ترتیب مهم است، می‌دانیم که ترتیب انتخاب ABCD که A رئیس، B معاون، C منشی و D مسؤول مالی بوده که در صورت CABD، Cرئیس، A معاون، B منشی و D مسؤول مالی می‌باشد.

بنابراین مسألهٔ ترتیب یا پر موتیشن 4 از 7 بوده داریم.

$$P_{(4)}^{\;7}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=840$$



تمرین

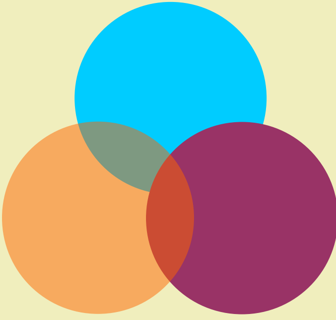
1- با هفت حرف G,F,E,D,C,B,A چند کلمهٔ 4 حرفی، بدون تکرار می‌توانیم بسازیم؟

2- هفت تیم در یک تیم والیبال اشتراک دارند، به چند شکل، تیم‌ها می‌توانند مقام اول، دوم وسوم را به دست آورند؟

3- ازبین 4 مرد و 6 زن به تعداد 2 مرد و 3 زن طوری انتخاب می‌نماییم که از تیم انتخابی مرد ها اولی رئیس و دومی مسؤول مالی باشد.

ترکیب

Combination



آیا می‌دانید که رنگ‌های اصلی کدام‌ها اند؟

ترکیب رنگ نارنجی و بنفش کدام است؟

به نظر تان رنگ زرد از ترکیب کدام رنگ‌ها به وجود می‌آید؟ رنگ آبی، رنگ بنفش، رنگ نارنجی؟

فعالیت

از بین 5 نفر از هم‌صنفان تان به چند شکل می‌توانید یک گروپ 3 نفری را انتخاب نمایید؟

- موضوع را به شکل عملی در صنف حساب کنید.؟
- اگر از بین همین 5 نفر یک گروپ 3 نفری را طوری انتخاب نماییم که نفر اول سر گروپ، نفر دوم معاون سر گروپ و نفر سوم منشی باشد، تعداد کل اشکال انتخاب گروپ سه نفره مذکور چند است؟
- انتخاب‌های پاراگراف اول و آخر فعالیت از هم چه فرق دارند؟
- آیا حدس زده می‌توانیم که فرق گروپ‌های بالا برابر به کدام عدد حسابی خواهد بود؟.

از انجام فعالیت بالا نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه: در انتخاب یک گروپ k عنصره از یک ست n عنصره به‌صورت کل به‌دو شکل صورت گرفته که در یکی آن، ترتیب در نظره بوده؛ اما در دیگر آن ترتیب مهم نبوده صرف ترکیب آن‌ها مورد علاقه می‌باشد. بدین ترتیب، برای ترکیب k شی از n شی متمایز تعریف زیر را در نظر می گیریم:

تعریف: تعداد ترکیب k عنصر از n عنصر یک ست که به طور معمول به $C^n_{(k)}$ نشان داده و $\binom{n}{k}$ عبارت از تعداد امکانات ترکیب از n عنصر مختلف که به تعداد k عنصر آن را بدون ترتیب انتخاب می‌نماییم عبارت است از: $0 \le k \le n$ ،

$$C^n_{(k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال 1: از بین 30 نفر انتخاب 4 نفر، برای یک ترکیب که ترتیب بین آن‌ها در نظر نباشد، می‌توان آن‌را به تعداد 27405 شکل انتخاب نماییم.

زیرا می‌دا نیم که مسأله عبارت از ترکیب 4 و از 30 بوده؛ بنابراین داریم:

$$C_4^{30} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26!}{26!\cdot 4!} = 27405$$

مثال 2: ست $A = \{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\}$ چند ست فرعی 3 عنصره دارد؟

حل: می‌دانیم که مسأله در حقیقت انتخاب 3 از 5 بوده؛ بنابراین داریم:

$$C_3^5 \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 2\cdot 5 = 10$$



تمرین

1- هرگاه در یک امتحان از جمله 10 سؤال به 7 سؤال جواب مطلوب باشد، به چند شکل می‌توانیم 7 سؤال از 10 سؤال برای حل، انتخاب نماییم؟

2- 5 نقطهٔ مختلف در یک مستوی که به استقامت یک خط مستقیم واقع نیستند در نظر بگیرید. از وصل سه نقطه چند مثلث را می‌توانیم تشکیل دهیم؟

3- اگر $P_n^{(2)} - C_n^{(2)} = 36$ باشد، قیمت n چند است؟

تبدیل‌ها
Variation



از 10 تیم ورزشی که در یک المپیا اشتراک دارند به چند شکل، امکان برد مدال طلا، نقره و برونز وجود دارد؟

فعالیت

- n- شی متمایز را در نظر گرفته به تعداد k شی را، از بین آن‌ها انتخاب نموده، تعداد انتخاب‌ها مجموعی آن را به دست آورید؟
- هرگاه در انتخاب k شی ترتیب طوری در نظر باشد که انتخاب اولی، دومی ....وغیره وجود داشته باشد، تعداد مجموعی حالات چند است؟
- فرق بین تعداد اشکال دو حالت فوق به کدام اندازه است؟

از انجام فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: تعداد ترکیب‌های که ترتیب مسلسل k عنصر انتخابی مورد نظر از n عنصر در آن در نظر باشد مساوی به $k!\cdot C_k^n$ می‌باشد.

این ترکیب را به نام variation یا تبدیل یاد نموده و به گونهٔ معمول آن‌را به v_k^n نشان می‌دهند:

$$v_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\frac{n!}{k!(n-k)!.} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow \quad v_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

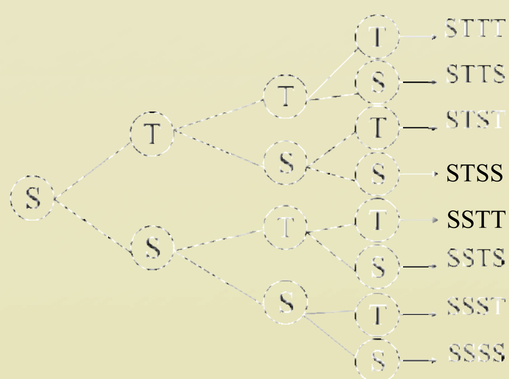
مثال: چند امکان وجود دارد که در جلسهٔ انتخاباتی از جملهٔ 30 نفر اشتراک کننده، به تعداد 4 تن برای رهبری طوری که یک نفر رئیس، یک معاون اول، یک معاون دوم و نفر چهارم آن بست منشی اشغال وظیفه نمایند؟

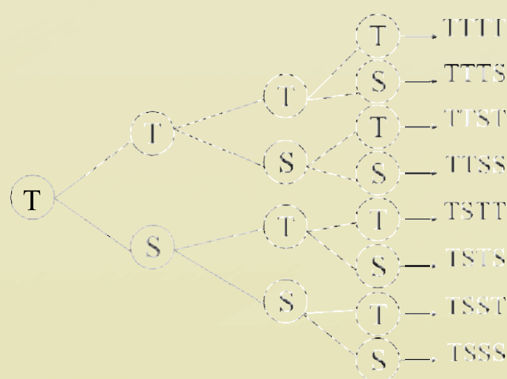
حل: مسأله در حقیقت تبدیل 4 نفر از 30 تن بوده که نظر به تعریف تعداد امکانات آن عبارت اند از:

$$v_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26!} = 657520$$

شکل انتخاب ویا هم آمیختن k عنصر از n عنصر	تعداد امکانات	
	بدون تکرار $k \geq n$	با تکرار $k \leq n$
ترتیب‌ها و یا permutation	$P_n = n!\ ,\quad n = k$	$P_k^n = \frac{n!}{k!}$
ترکیب‌ها و یا combination	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل‌ها و یا Variation	$v_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$v_k^n = n^k$

مثال: اگر یک سکه را پرتاب نماییم، می‌دانیم، فضای نمونه دارای دو حالت ممکن شیر و یا خط بوده که هر کدام آن، دارای احتمال $\frac{1}{2}$ می‌باشد. اگر سکهٔ مذکور دو، سه چهار هشت و یا شانزده مرتبه پرتاب گردد، می‌دانیم که با در نظر داشت حالات هم چانس فضای نمونه در یک گراف درختی به شکل زیر خواهد بود : (شیر = S و خط =T در گراف استفاده شده است.





مثال فوق را به‌خاطر شیر و یا خط آمدن‌ها در جدول زیر برای 1,2,3 و 4 مرتبه انداخت یک سکه جمع بندی می‌نماییم.

انداخت سکه	هیچ بار		یک بار		دو بار		سه بار		چهار بار	
	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط
تعداد برآمدن خط	1	0	$1/2$	0	$1/4$	0	$1/8$	0	$1/16$	0
			$1/2$	1	$2/4$	1	$3/8$	1	$4/16$	1
					$1/4$	2	$3/8$	2	$6/16$	2
							$1/8$	3	$4/16$	3
									$1/16$	4

با دقت به جدول فوق در صورت احتمال آمدن نظمی را مشاهده می‌نماییم که برای اولین بارتوسط پاسکال ارایه و به‌نام موصوف یادگردیده است.

مثال هر عدد در یک سطر مثلث اعداد از جمع اعداد چپ و راست آن در سطر بالایی به‌دست می‌آید.



این شیوه می‌توان مثلث را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، که اگر آن‌ها را ضرایب انکشاف بینوم یک دو جمله یی (بینومیل) $(a+b)$ مقایسه نماییم مطابق به اعداد مثلث فوق می‌باشند، مثال دقت نمایید به انکشاف دو جمله‌یی ذیل ضرایب حدود آن‌را که در دایره گرفته شده اند با اعداد داخل دایره‌ها مثلث پاسکال مقایسه کنید.

$(a+b)^0 = ①$

$(a+b)^1 = ①a + ①b$

$(a+b)^2 = ①a^2 + ②ab + ①b^2$

$(a+b)^3 = ①a^3 + ③a^2b + ③ab^2 + ①b^3$

$(a+b)^4 = ①a^4 + ④a^3b + ⑥a^2b^2 + ④ab^3 + 1\ b^3$



این مسأله را با استفاده از تعریف n بالای k انکشاف داده $(a+b)^n$ به طور زیر می‌نویسیم:

$$(a+b)^n = C_r^n a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

از علامت $\sum$ سیگما برای مجموعهٔ آن استفاده می‌شود؛ بنا براین احتمال خط آمدن k مرتبه عبارت است از: $\mathrm{P}(\text{خط آمدن}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$



1- از 12 تیم فوتبال شامل مسابقه، به چندشکل برنده برای مقام اول، دوم و سوم وجود دارد؟

2- از بین 20 تن از شاگردان صنف یازدهم به چند شکل می‌توان 2 تن را به حیث نماینده و معاون صنف انتخاب نماییم؟

قضیهٔ بینوم

از روی مثلث پاسکال ضرایب انکشاف بینوم ذیل را تعیین کنید؟

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

فعالیت

- در یک تجربهٔ اتفاقی که در آن فقط دو حادثه A و A' اتفاق می‌افتد، یعنی دارای فضای نمونه $\{A.A\}$ باشد، در نظر بگیرید.
- هر گاه $P(A) = P$ احتمال وقوع حادثه A باشد. احتمال حادثه مکمل آن، یعنی A' چند است. $P(\overline{A}) = ?$
- در صورت تکرار تجربهٔ مذکور هر گاه برای وقوع حادثه Aعدد 1 و برای عدم وقوع آن‌را استعمال نماییم، جدول زیر را برای دوبار تکرار تجربه، یعنی $n=2$ تکمیل کنید.

ارائه ضرایب بینوم	احتمال	نتیجه ممکنه	K
$\binom{2}{0} \cdot P^0 \cdot (1-P)^2$	$(1-P)^2$		0
	$2P(1-P)$	10	1
$\binom{2}{2} p^2 \quad (1-p)^2$		11	2
$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^k = ?$	$(p+(1-p))^2$		

طرز نوشته $B(n, p, k)$ طرز ارائهٔ بینوم یا احتمال مشکل برنولی یاد گردیده عبارت است از:

$$B(n \cdot p \cdot k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

بنابراین، انکشاف بینوم را می‌توان به‌شکل زیر بنویسیم:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

مثال: از n نفر به تعداد k نفر به صورت اتفاقی انتخاب می‌گردند. مطلوب است احتمال انتخاب تحت k شخص که انتخاب گردیده به تعداد 2 تن شان در یک روز تولد شده باشند ؟

$$P(k \le n) = ?$$

حل: ما فرض می‌کنیم که هر روز سال دارای عین احتمال $\frac{1}{365}$ به‌حیث روز تولد برای فردی شخصی مورد سؤال بوده نه سال تولد بودن این‌که در نظر گرفته شود، مورد نظر نیست.

بنا براین، فضای نمونه Ω از تمام امکان k حادثه اتفاقی در 365 روز است داریم:

$$1\Omega1 = (365)k$$

حادثهٔ A : حد اقل در یک روز تولد یافته اند، طوری ساده‌تر قابل محاسبه است که در برابر آن حادثهٔ $\bar{A}$ را در نظر بگریم. بنابراین، $\bar{A}$ عبارت از k نفر که در روزهای مختلف سالگره دارند و یا تولد گردیده اند. بنابراین، $\overline{A}$ عبارت از k پروموتاشیون یا ترتیب از 365 بوده داریم:

$$P(\overline{A}) = \binom{365}{k} = \frac{365!}{(365-k)!}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = 1 - \binom{365}{k} = 1 - \frac{365!}{(365-k)!} \cdot \frac{1}{(365)^k}$$



تمرین

نشان دهید که:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \qquad (II)$$

احتمال دو جمله‌یی



آیا می‌توانیم نتایج هر فضای نمونه را در دو حادثهٔ اتفاقی که با هم هیچ عنصر مشترک نداشته باشد ترتیب نماییم؟
موضوع را از نگاه تیوری ست در یک فضای نمونهٔ اختیاری Ω برای دو حادثهٔ اتفاقی که اتحاد شان مساوی به فضای نمونه است با مثال تشریح کنید.

فعالیت

از آمدن تجربه‌های تصادفی نام ببرید که در یک فضای نمونه آن را که دارای دو عنصر یا عناصر آن دو حادثه اتفاقی باشد؟

- آیا تجاربی را که فضاهای نمونه شان بیشتر از 2 عنصر دارند می‌توانیم به فضاهای نمونهٔ دو عنصره تبدیل نماییم؟ مثال دهید؟
- به صورت عمومی چگونه می‌توانیم یک فضای نمونه چند عنصره را به فضای نمونهٔ دو عنصره تبدیل نماییم؟
- اگر وقوع یکی از عناصر فضای نمونه P باشد، احتمال حادثهٔ دومی آن چیست؟
- اگر تجربه را n بار اجرا نماییم و احتمال k بار از این n بار تجربه $(0 \leq k \leq n)$ پیروزی و بقیه ناکامی باشد، احتمال k بار پیروزی (p) را در تکرار n بار تجربهٔ تصادفی دریافت کنید؟
- از انجام فعالیت بالا نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم؟

نتیجه: هر تجربهٔ تصادفی را می‌توان به یک تجربه که دارای دو حالت باشد می‌توانیم تقلیل دهیم.

- هر فضای نمونه و یک تجربه دو حالت دارد اگر یکی از حالت‌ها به‌حیث پیروزی دارای احتمال p در نظر گرفته شود حالت دیگر آن عبارت از حالت ناکامی بوده که دارای احتمال $1-P$ می‌باشد.
- با تکرار n بار تجربه ، احتمال k بار پیروزی، یعنی p از این n بار که بقیه حالت‌ها که باخت یا شکست، یعنی $q=1-p$ بوده داریم:

$$=\binom{n}{k}.P^{p-k}.(1-p)^k \; 0\le k\le n$$ احتمال k (ام) بار پیروزی در انجام n بار تجربه

مثال 1: دقت نمایید که هرگاه در انجام یک تجربهٔ تصادفی احتمال پیروزی $\frac{1}{2}$ باشد، احتمال ناکامی نیز مساوی به $\frac{1}{2}$ می‌باشد؛ بنابراین در چنین تجربه‌یی تصادفی، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\binom{n}{k}p^{n-k}(1-p)^k$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

نتیجه را در تکرار n بار یک تجربهٔ تصادفی که از جمله k بار آن پیروزی باشد برای یک تجربه 2 عنصره تحقیق کنید.

مثال 2: در یک فامیل 5 فرزند احتمال این‌که دوتن آن‌ها پسر و بقیه دختر باشد چند است؟

هرگاه چانس تولد پسر و دختر نوزاد را برابر در نظر بگیریم داریم.

در این مثال : $P=\frac{1}{2}$, $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ بوده و نظر به فورمول به دست می‌آید:

$\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}$ احتمال این‌که دو پسر و سه دختر باشد.

مثال 3: یک دانه رمل را 6 بار می‌اندازیم. دریافت کنید احتمال آن‌که تنها در 4 پرتاب آن عدد ظاهر شده کمتر از 3 باشد؟

حل: هرگاه آمدن کمتر از 3 را حالت برد در نظر بگریم در این‌صورت $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ بوده و $q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.3333=33.33\%$ می‌باشد؛ بنابراین نظر به فورمول احتمال دو جمله یی داریم:

$=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$ احتمال آن‌که در 4 پرتاب، عدد ظاهر شده کم تر از 3 باشد.

مثال4: یک سکه طوری پرکاری شده است که احتمال آمدن خط سکهٔ فقط $\frac{1}{3}$باشد، هر گاه این سکه را چار بار پرتاب نماییم، مطلوب است احتمال آن‌که حد اقل سه بار شیر بیاید.

حل: اگر پیش‌آمد ظاهر شدن خط سکه را برد در نظر داشته باشیم و احتمال آن p باشد، پس $1-P$ احتمال شیر آمدن سکه خواهد بود.

یعنی $1-P=\frac{1}{3}P$ که در اینجا $p=\frac{3}{4}$, $q=1-p=\frac{1}{4}$ بوده در نتیجه داریم:

احتمال حد اقل سه بار شیر آمدن سکه در 4 پرتاب $=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)+\binom{4}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$

مثال5: یک سکه نور مال را چند بار پرتاب نماییم تا احتمال حد اقل یک بار خط آمدن بیشتر از 99%باشد.

حل: فرض می‌نماییم که سکه را n بار پرتاب می‌نماییم؛ احتمال این‌که حد اقل یک بار خط بیاید. برابر است با:

احتمال حد اقل یک بار خط آمدن = 1-(احتمال این‌که هر n بار شیر بیاید) $1-\binom{n}{n}\times\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

بنا بر شرط مسأله باید $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ در نتیجه $2^n>100$ ویا $n\geq 7$ می‌باشد.

بنابراین حد اقل باید سکه را هفت بار پرتاب نماییم تا احتمال این که حد اقل یک بار خط باشد، بیشتر از 0.99 باشد.



تمرین

1- یک سکه را چند بار پرتاب نموده دریافت کنید احتمال آن‌که:

(1) در 4 بار پرتاب، دو بار خط بیاید.

(2) در 6 بار پرتاب ، چهار بار خط بیاید.

(3) در 8 بار پرتاب، چهار بار خط بیاید.

(4) حدس بزنید اگر سکه را 2^n بار پرتاب نماییم، n بار خط بیاید با افزایش n تغییرات p چگونه می‌باشد؟

فکتوریل: برای یک عدد n حاصل ضرب $1\cdot2\cdot3....n$ را به‌صورت مختصر به $n!$ داده که n فکتوریل خوانده می‌شود، نشان می‌دهند. بر طبق تعریف $0!=1$ است.

پرموتشین یا ترتیب ها: تعداد ترتیب تکرار وجود دارد که با دقت با حالت بدون تکرار تعداد مجموعی آن برابر است با $(k \le n)$, $P_n^k = \frac{n!}{k!}$ n عنصر را به p_n نشان داده (در صورتی که تکرار مجاز و یا ممکن نباشد) مساوی‌است به $P_n = n!$

و اما در صورتی که تکرار مجاز باشد، تعداد ترتیب‌های با تکرار مساوی به P_n^k بوده و چنین معنی می‌دهد که k مرتبه در n ترتیب $n\binom{n}{k}$ بالای k : طرز نوشته یی $\binom{n}{k}$ که n بالای k خوانده می‌شود در حقیقت ضریب بینوم که عدد k آن توان بینوم را مشخص می کند عبارت است از:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.k, n \in IN, 0 \le k \le n.$$

تعداد ترکیب r شی ازیک ست n عضوی عبارت از $c_n^{(n)}$ بوده و مساوی‌است به:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad r \le n.$$

وریشن(Variation) یا تبدیل‌ها: تعداد ترکیب‌های که ترتیب مسلسل k عنصر انتخابی مورد نظر از n عنصر در آن مطلوب باشد مساوی به $V_n^k = k! \cdot C_n^k = k$ وریشن یا تبدیل یاد می‌شود؛ یعنی:

$$V_k^n = k! \cdot C_{(k)}^n = k! \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

قضیهٔ بینوم: انکشاف دو جمله‌یی $(a+b)^n$ عبارت است از:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-1} b^k$$

در تکرار n بار تجربهٔ تصادفی دوجمله‌یی که هر حالت دارای احتمال P و $q = 1 - p$ بوده احتمال k بار پیروزی، یعنی p از n بار بقیه حالت‌ها که ناکامی، یعنی $q = 1 - p$ بوده داریم:

احتمال k بار پیروزی و انجام n بار تجربه $= \binom{n}{k} p^{n-k} \cdot (1-p)^k, 0 \le k \le n$



تمرین فصل نهم

1: مجموعه اعداد زیر را در نظر بگیرید $S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ مطلوب است؟

(I) چند عدد سه رقمی با استفاده از عناصر مجموعهٔ فوق می‌توانیم ترتیب نماییم؟

(II) تعداد اعداد سه رقمی که جفت باشند چند است؟

(III) چه تعداد، اعداد مذکور مضرب 5 اند؟

(V) چه تعداد آن‌ها مضرب 5 و بزرگتر از 300 اند؟

2: به چند طریقه می‌توانند 6 شاگرد در یک قطار کنار هم ایستاده شوند؟

3: به چند شکل، احمد، مسعود، عبدالله، رومان و کیهان می‌توانند در یک قطار کنار هم عکس یادگاری بگیرند در صورتی که:

(I): رومان و کیهان می‌خواهند در عکس کنار هم باشند؟

(II): احمد و مسعود نمی‌خواهند در عکس کنار هم باشند؟

(III):در صورتی که عبدالله کنار چپ کیهان می‌خواهد در عکس ایستاده باشد؟

4- به چند شکل می‌توانیم که 9 نفر را به 3 گروه تقسیم نماییم.؟

5- نشان دهید که $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^{n}.$

6- از روی مثلث پاسکال انکشاف $(a+b)^7$ مساوی به چند است؟